

# A TALAJRÓL KÖSZÖRÜLVE VISSZAPATTANÓ LABDA MECHANIKÁJA – 1. RÉSZ

Mikor pattan föl a labda függőlegesen vagy vissza az eldobó kezébe?

Horváth Gábor, Szferle Tamás

ELTE, Biológiai Fizika Tanszék

Nagy-Czirok Lászlóné Kiszi Magdolna, Gudmon Olivér, Nagy Norbert

Kiskunhalasi Fazekas Mihály Általános Iskola

*Asztalitenisz-mérkőzések közben bizonyára már mindenki látott az asztalról furcsán visszapattanó pingponglabdát, ami a nem várt irányban pattant vissza, mondjuk függőlegesen, vagy még meglepőbb módon visszafelé, megzavarva az ellenfelet. E szokatlan visszapattanási irányokat a labda speciális pörgő-köszörülő mozgása okozza. Ilyen rendkívüli visszapattanásokat néha más labdajátékok (például labdarúgás, röp-, kosár- és kézilabda) során is megfigyelhetünk. Vajon milyen feltételek teljesülése mellett pattan vissza egy labda a talajról pont függőlegesen, vagy éppen vissza az eldobó labdajátékos kezébe? Cikkünkben erre válaszolunk. Az 1. részben részletesen tárgyaljuk a talajról köszörülve-gördülve visszapattanó pörgő labda mechanikáját. A 2. részben pedig az elméletileg levezetett speciális visszapattanási irányokat állítjuk elő egy tornateremben kosár- és pingponglabdákkal, és mindezt filmfelvételekkel, illetve a belőlük készült képsorozatokkal szemléltetjük. Írásunkkal egy sportmechanikai példát mutatunk arra, miként kelthető föl a labdajátékokat kedvelő és űző diákok érdeklődése a fizika iránt.*

Visszapattanáskor belapuló labda függőleges irányú mozgása

Tekintsük a talajról köszörülve visszapattanó, pörgő labda mozgását. Az  $R$  sugarú, gömb alakú labda  $\omega$  szögsebességgel forogjon vízszintes tengelye körül, ami legyen merőleges a beesési és visszapattanási irány által meghatározott függőleges síkra (1. ábra). A labda súlyát az ütközésnél fellépő nagy talajerő mellett elhanyagolhatjuk, és a behorpadásától eltekintve a labdát merev testnek tekinthetjük.



Nagy-Czirok Lászlóné Kiszi Magdolna mesterpedagógus, a Kiskunhalasi Fazekas Mihály Általános Iskola matematika-fizika szakos tanára és igazgatója. A hatásos tanulási-tanítási eljárások alkalmazása mellett azok fejlesztésével és kutatásával is foglalkozik. A tudástérképek tanulási- és gondolkodásfejlesztő módszeréről könyvet és folyóiratcikket írt. Tapasztalatait pedagógus szakvizsgát adó képzésben a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem oktatójaként is továbbadja.



Horváth Gábor fizikus, az MTA doktora, az ELTE Biológiai Fizika Tanszék Környezetoptika Laboratóriumának vezetője. A vizuális környezet optikai sajátosságait és az állatok látását tanulmányozza, továbbá biomechanikai kutatásokat folytat. Számos szakmai díj és kitüntetés tulajdonosa.



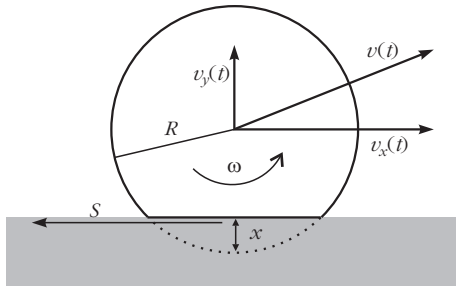
Gudmon Olivér 8. osztályos tanuló, az iskola tehetségprogramjának tagja, informatika és média eszközök és eljárások alkalmazásával, kreatív ötleteivel járul hozzá a projektek sikeréhez.



Szferle Tamás az ELTE fizika-földrajz tanárszakos hallgatója, amatőr rögbijátékos. BSc szakdolgozatát a rögbi fizikájáról írta.



Nagy Norbert 8. osztályos tanuló több területen tehetséggondozott. A Kárpát-medencei prózafelolvasó versenyen különdíjban részesült. Az iskola Bozsik-programban részt vevő focicsapatának egyik erőssége.



1. ábra. A talajról kőszörülve visszapattanó labda jellemzői.  $R$ : sugár,  $x$ : a labda függőleges irányú benyomódása,  $S$ : csúszó súrlódási erő,  $v$ : sebességvektor,  $v_x$ : vízszintes sebességkomponens,  $v_y$ : függőleges sebességkomponens,  $\omega$ : a vízszintes szögsebességvektor nagysága.

Kőszörülésről akkor beszélünk, ha visszapattanásakor a labda  $v_x(t)$  vízszintes sebességkomponense nem egyezik meg a  $-R\omega$  kerületi sebességével:  $v_x \neq -R\omega$ . Ilyenkor csúszási súrlódás lép föl a labda és a talaj között, ami leginkább tenisz- és pingpongmecsekben figyelhető meg, de néha a labdarúgásban és más labdajátékokban is tapasztalhatjuk e jelenséget.

Amikor a labda a talajjal ütközik, kissé benyomódik, amit a következő egyszerű módon bizonyíthatunk: egy labda egyik felét mártjuk vízbe, majd ejtsük egy száraz padlóra. A labda a visszapattanása után egy kerek, nedves foltot hagy a padlón a benyomódása miatt. Ha a visszapattanás egy adott pillanatában a labda  $R$  sugara függőleges irányban  $x$ -szel csökken (1. ábra), akkor az  $x$ -hez tartozó gömöbsüveg

$$V_{Gs} = \frac{\pi}{3} (3R - x) x^2$$

térfogatával csökken a labda

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} R^3$$

térfogata. A  $V_{Gs}$  térfogatú gömöbsüvegnyi belapulásakor tehát a labdatérfogat  $V = V_0 - V_{Gs}$ . Mivel a labda visszapattanása igen rövid időn belül megtörténik, ezért a labdabeli gáz ezalatti állapotváltozását adiabatikusnak (a külvilággal való hőcsere nélkülinek) tekinthetjük. A belapuló labdabeli gáz adiabatikus összenyomódására érvényes állapotegyenlet:

$$p_0 V_0^\kappa = p V^\kappa,$$

ahol  $\kappa = c_p/c_v$  a labdát töltő gáz (általában levegő) állandó  $p$  nyomáshoz, illetve állandó  $V$  térfogathoz tartozó  $c_p$ , illetve  $c_v$  fajhőjének aránya. Az előbbiekből kapjuk a belapuló labdabeli  $p(x)$  nyomást az  $x$  benyomódás függvényében:

$$p(x) = p_0 \left( \frac{4R^3}{4R^3 + x^3 - 3Rx^2} \right)^\kappa. \quad (1)$$

Amikor a labda benyomódása  $x$ , a talajjal egy

$$r(x) = \sqrt{2Rx - x^2}$$

sugarú körfelületen érintkezik, amire a  $p(x)$  nyomású

belső gáz által kifejtett erő  $p(x)r^2(x)\pi$ . A labdára a talaj

$$F(x) = [p(x) - p_L] r^2(x) \pi$$

erővel hat vissza, ahol  $p_L$  a légköri nyomás, hiszen a labda alól nem szorul ki a levegő. Ha a labda vizes, vagy vizes aljzatról pattan vissza, akkor egy vízhártya van alatta. Ekkor a vízhártyabeli nyomás közelítőleg megegyezik a  $p_L$  légköri nyomással, így a labdára viszszaható talajerő ekkor is  $[p(x) - p_L] r^2(x) \pi$ , vagyis ekkor is csak a  $p(x) - p_L$  túlnyomás számít. Innen adódik az  $x$ -szel belapuló, visszapattanó labdára függőlegesen fölfelé ható talajerő nagysága:

$$F(x) = (2Rx - x^2) \pi \left[ p_0 \left( \frac{4R^3}{4R^3 + x^3 - 3Rx^2} \right)^\kappa - p_L \right]. \quad (2)$$

Kis benyomódásokkor  $x \ll 1$ , és ekkor  $x^2$ ,  $x^3$  elhanyagolhatóan kicsi. Ekkor (2) a következővel közelíthető:

$$F(x \ll 1) \approx 2\pi R(p_0 - p_L)x \equiv Dx, \quad (3)$$

$$\text{ahol } D = 2\pi R(p_0 - p_L).$$

A föntheik csak akkor érvényesek, ha a labda fala nem merev, mint a pingponglabdáé (ami kilyukasztva is megtartja gömbalakját, hiszen nem a belső töltőgáz külső légköri nyomáshoz képesti túlnyomása fúj föl gömbbé, hanem a labda merev fala tartja a gömbalakot), hanem hajlékony, mint például a kosárlabdáé (ami kilyukasztva elveszíti gömbalakját, összelaffad, mert a töltőgáz túlnyomása fújja föl gömbbé). De pingponglabdánál is igaz, hogy kis  $x$  benyomódások mellett a rá viszszaható talajerő  $F(x \ll 1) \approx Dx$ , csak a  $D$  állandó (3)-tól eltérő módon számolandó. Ezért – a  $D$  állandó pontos kifejezésétől eltekintve – a továbbiak merev falú labdákra is érvényesek.

Newton II. törvénye szerint, kis  $x$  benyomódások esetén az  $m$  tömegű visszapattanó labda függőleges irányú mozgásának egyenlete

$$F(x) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx(t),$$

ami a harmonikus rezgőmozgás egyenlete, és a megoldása  $x(t) = A \sin(\Omega t)$ , ahol  $A$  a rezgés amplitúdója és  $\Omega = (D/m)^{1/2} = 2\pi/T$  a körfrekvenciája, ahonnan a rezgés periódusideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Időbeli szimmetriaokból kifolyólag, a labda talajjal történő ütközésének időtartama

$$t_{\ddot{u}} = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m\pi}{2R(p_0 - p_L)}} = \frac{\pi}{\Omega} \quad (4.a)$$

és ebből  $\Omega$  körfrekvenciája:

$$\Omega = \frac{\pi}{t_{\text{ü}}} = \sqrt{\frac{2\pi R(p_0 - p_L)}{m}}. \quad (4.b)$$

Példának okáért,  $p_L = 1$  bar légköri nyomás esetén egy  $m = 2$  kg tömegű,  $p_0 = 2$  bar =  $2 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> belső nyomással  $R = 0,15$  m sugarúra felfújt kosárlabda (4) szerinti ütközési ideje  $t_{\text{ü}} = 14,5$  ms.

Az  $x(t) = A \sin(\Omega t)$  idő szerinti deriváltja a labda függőleges irányú sebességét adja:

$$v_y(t) = A \Omega \cos(\Omega t).$$

A labda függőleges sebességösszetevőjének nagysága a talajhoz csapódás  $t = 0$  pillanatában  $v_y(t=0) = v_{y0} = v_0 \sin \alpha$ , ahol  $v_0$  a labda becsapódási sebessége,  $\alpha$  pedig a sebességvektor vízszintestől mért, lefelé irányuló szöge. Innen az amplitúdóra kapjuk:

$$A = v_0 \sin \alpha \sqrt{\frac{m}{2\pi R(p_0 - p_L)}}. \quad (5)$$

Végül kapjuk a visszapatannáskor a labdára ható talajerő nagyságát az idő függvényében:

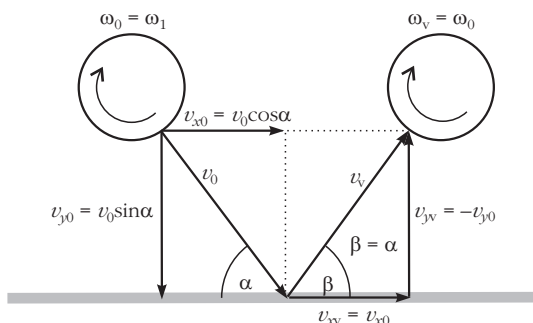
$$F(t) = v_0 \sin \alpha \sqrt{2m\pi R(p_0 - p_L)} \times \sin \left( t \sqrt{\frac{2\pi R(p_0 - p_L)}{m}} \right). \quad (6)$$

$F(t)$  olyan nagy, ami mellett a labda  $mg$  súlya elhanyagolható.

## Visszapattanás gördülve, köszörülés nélkül

A talajra becsapódó, majd visszapatannó labda nem köszörül, ha a  $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$  vízszintes sebességösszetevőjének nagysága megegyezik az  $R\omega_1$  kerületi sebességgel, és e két sebességvektor ellentétes irányú, azaz a labda vízszintes szögsebességvektora balra

2. ábra. A köszörülés nélkül, gördülve visszapatannó labda sebességvektorainak komponensei és szögsebességei.  $\alpha$ : beesési szög,  $\beta$ : visszapatannási szög, az alsó  $v$  index a visszapatannás utáni végállapotra utal, míg a 0 index a kezdő értékre.



mutat, a labda haladási iránya felé nézve (2. ábra):  $v_{x0} = v_0 \cos \alpha = R\omega_1$ , ahonnan a becsapódáskori kezdő szögsebesség nagysága

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{v_0 \cos \alpha}{R}.$$

Mivel a gördülés miatt nem lép fel csúszási súrlódási erő, ezért a labda vízszintes sebességösszetevője nem változik. Ezért a labda  $\beta$  visszapatannási szöge megegyezik az  $\alpha$  beesési szöggel (2. ábra):  $\alpha = \beta$ . Mivel nem lép fel súrlódási erő, ezért a labda forgását sem változtatja meg semmilyen forgatónyomaték, így  $\omega = \omega_0 = \omega_1 =$  állandó.

## Előre pörgő, a vízszintes sebességet gyorsító köszörülés

A lepattanó labda pörögjön előre, vízszintesen balra mutató  $\omega_0$  kezdeti szögsebességvektorral úgy, hogy a hátrafelé mutató kezdeti  $v_{k0} = R\omega_0$  kerületi sebessége nagyobb legyen a vízszintes irányú  $v_0 \cos \alpha$  kezdősebességénél:  $v_{k0} = R\omega_0 > v_0 \cos \alpha = R\omega_1$ , ahonnan

$$\omega_0 > \omega_1 = \frac{v_0 \cos \alpha}{R}.$$

Így amikor kezdetben a labda a talajon tartózkodik, egy előre irányuló

$$S = \mu F(t) = m \frac{dv_x}{dt}$$

nagyságú csúszási súrlódási erő gyorsítja vízszintesen, aminek forgatónyomatéka

$$M = SR = \mu RF(t) = -\theta \frac{d\omega}{dt},$$

ahol  $\mu$  a labda és a talaj közti csúszási súrlódási együttható,  $\theta$  pedig a labda tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozóan. E két differenciálegyenletet megoldva kapjuk a labda vízszintes sebességkomponensének ütközés alatti időbeli változására:

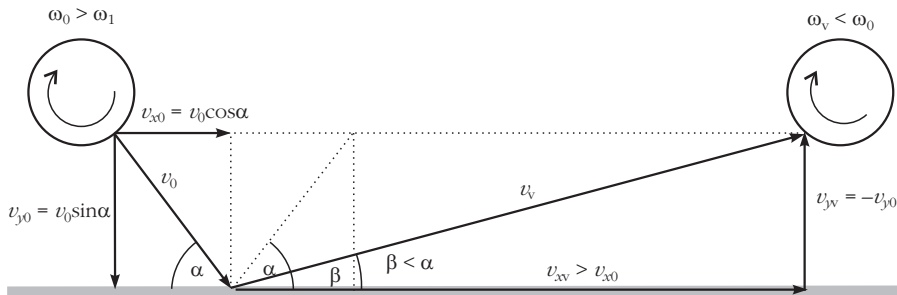
$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha + \mu v_0 \sin \alpha [1 - \cos(\Omega t)]$$

és a labda szögsebességére:

$$\omega(t) = \omega_0 - \mu R m v_0 \sin \alpha \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\theta}.$$

A labda addig köszörül, amíg az  $M$  súrlódási forgatónyomaték miatt lassuló  $R\omega(t)$  kerületi sebessége el nem éri az  $S$  súrlódási erő miatt növekvő vízszintes  $v_x(t)$  sebességösszetevőjét. Ezért a  $t_{k1}$  köszörülési időt a  $R\omega(t_{k1}) = v_x(t_{k1})$  egyenletből kapjuk:

$$t_{k1} = \frac{1}{\Omega} \arccos \left[ 1 + \theta \frac{v_0 \cos \alpha - R\omega_0}{\mu v_0 (\theta + m R^2) \sin \alpha} \right]. \quad (7)$$



3. ábra. A vízszintes sebességet köszörüléssel gyorsító, előre pörgő, visszapattanó labda sebességvektorainak komponensei és szögsebességei.

Amikor már a talajon elkezd köszörülésmentesen gördülni a labda, akkor a  $t_{k1}$  köszörülési idő kisebb, mint a  $t_{ü}$  ütközési idő. Ekkor tehát  $t_{k1} < t_{ü}$  és  $v_x = v_x(t_{k1}) = R\omega(t_{k1})$ , vagyis a labda gördül, és ilyenkor a labda vízszintes végsebesség-komponense

$$v_x(t = t_{k1} < t_{ü}) = \frac{v_0 m R^2 \cos\alpha + \theta R \omega_0}{\theta + m R^2}, \quad (8)$$

valamint  $\beta$  visszapattanási szöge (3. és 4. ábra):

$$\tan\beta(t = t_{k1} < t_{ü}) = \frac{\theta + m R^2}{\theta R \omega_0 + m R^2} \tan\alpha. \quad (9)$$

Lehet olyan eset is, hogy amikor a labda éppen elpattan a talajtól, még mindig köszörül. Ekkor a  $t_{k1}$  köszörülési idő nagyobb, mint a  $t_{ü}$  ütközési idő:  $t_{k1} > t_{ü}$ , ahonnan  $v_{xv} = v_x(t_{ü}) < R\omega(t_{ü})$ , és ilyenkor a labda vízszintes végsebesség-komponense:

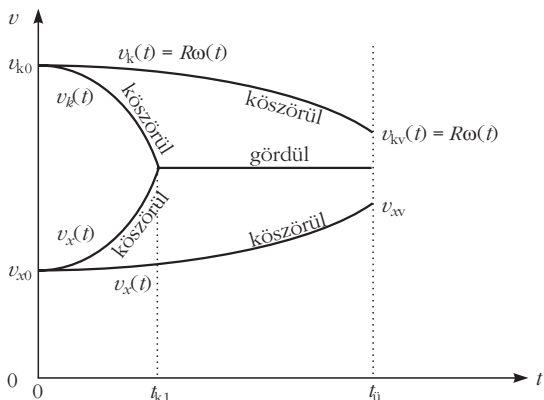
$$v_x(t = t_{ü} < t_{k1}) = v_0 (\cos\alpha + 2\mu \sin\alpha), \quad (10)$$

valamint  $\beta$  visszapattanási szöge (3. és 4. ábra):

$$\tan\beta(t = t_{ü} < t_{k1}) = \frac{\tan\alpha}{1 + 2\mu \tan\alpha}. \quad (11)$$

Ilyenkor tehát a  $\beta$  visszapattanási szög kisebb lesz az  $\alpha$  beesési szögnél a következő határértékekkel (3.

4. ábra. A vízszintes sebességet köszörüléssel gyorsító, előre pörgő, visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változása a talajjal való érintkezés során, azon eset feltüntetésével, amikor a köszörülés a  $t = t_{k1} < t_{ü}$  időpontban gördülésbe megy át még a  $t_{ü}$  ütközési idő előtt.



ábra):  $\beta(t = t_{k1} < t_{ü}, \omega_0 \rightarrow \infty) = 0$ ,  $\beta(t = t_{k1} < t_{ü}, \omega_0 = \omega_1) = \alpha$ . A 4. ábra vázlatosan szemlélteti a vízszintes sebességet köszörüléssel gyorsító, előre pörgő, visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változását a talajjal való érintkezés során azon eset feltüntetésével, amikor a köszörülés a  $t = t_{k1}$

$< t_{ü}$  időpontban gördülésbe megy át, még a  $t_{ü}$  ütközési idő előtt.

### Előre pörgő, a vízszintes sebességet lassító köszörülés

Pörögjön a lepattanó labda előre, vízszintesen balra mutató  $\omega_0$  kezdeti szögsebességvektorral úgy, hogy a hátrafelé mutató kezdeti  $v_{k0} = R\omega_0$  kerületi sebessége kisebb legyen a vízszintes irányú  $v_0 \cos\alpha$  kezdősebességénél:  $0 \leq v_{k0} = R\omega_0 < v_0 \cos\alpha = R\omega_1$ , ahonnan:

$$0 \leq \omega_0 < \omega_1 = \frac{v_0 \cos\alpha}{R}.$$

Így amikor kezdetben a labda a talajon tartózkodik, egy hátra irányuló

$$S = \mu F(t) = -m \frac{dv_x}{dt}$$

nagyságú csúszási súrlódási erő lassítja vízszintesen, aminek forgatónyomatéka

$$M = SR = \mu RF(t) = \theta \frac{d\omega}{dt}.$$

E két mozgásegyenletet megoldva kapjuk a labda vízszintes sebességkomponensének időbeli változására az ütközés alatt:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha - \mu v_0 \sin\alpha [1 - \cos(\Omega t)] \quad (12)$$

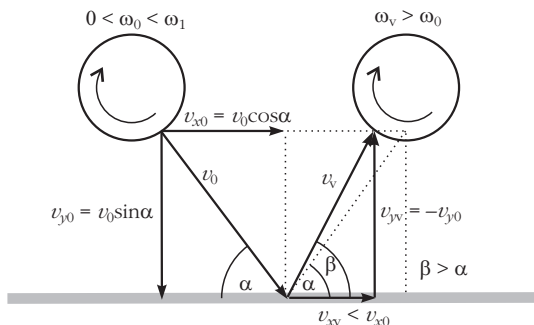
és a labda szögsebességére:

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu R m v_0 \sin\alpha \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\theta}. \quad (13)$$

A labda addig köszörül, amíg az  $M$  súrlódási forgatónyomaték miatt gyorsuló  $R\omega(t)$  kerületi sebessége el nem éri az  $S$  súrlódási erő miatt csökkenő vízszintes  $v_x(t)$  sebességösszetevőjét. Ezért a  $t_{k2}$  köszörülési időt megint az  $R\omega(t_{k2}) = v_x(t_{k2})$  egyenlet adja, ahonnan:

$$t_{k2} = \frac{1}{\Omega} \arccos \left[ 1 - \theta \frac{v_0 \cos\alpha - R\omega_0}{\mu v_0 (\theta + m R^2) \sin\alpha} \right]. \quad (14)$$

Mikor már a talajon elkezd köszörülésmentesen gör-



5. ábra. A vízszintes sebességet köszörüléssel lassító, előre pörgő, visszapattanó labda sebességvektorainak komponensei és szögsebességei.

dülni a labda, akkor a  $t_{k2}$  köszörülési idő kisebb, mint a  $t_{ü}$  ütközési idő. Ekkor a labda  $v_x(t=t_{k2} < t_{ü})$  vízszintes végsebesség-komponensét (8) és a  $\beta(t=t_{k2} < t_{ü})$  visszapattanási szögét (9) írja le (5. és 6. ábra).

Lehet olyan eset is, hogy amikor a labda éppen elpattanna a talajtól, még mindig köszörül. Ekkor a  $t_{k2}$  köszörülési idő nagyobb, mint a  $t_{ü}$  ütközési idő:  $t_{k2} > t_{ü}$ , amikor  $v_{xv} = v_x(t_{ü}) > R\omega(t_{ü})$  és a labda még mindig köszörül, és ilyenkor a labda vízszintes végsebesség-komponense

$$v_x(t = t_{ü} < t_{k2}) = v_0 (\cos\alpha - 2\mu \sin\alpha),$$

és  $\beta$  visszapattanási szögének tangense

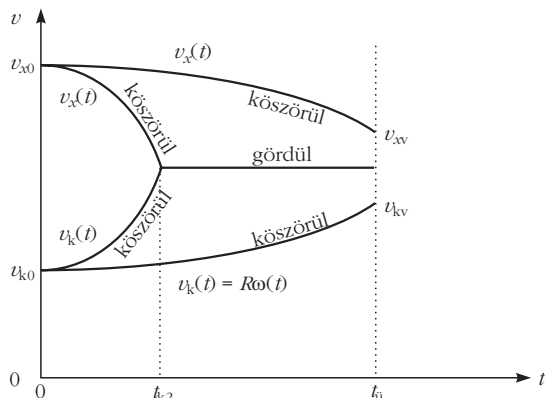
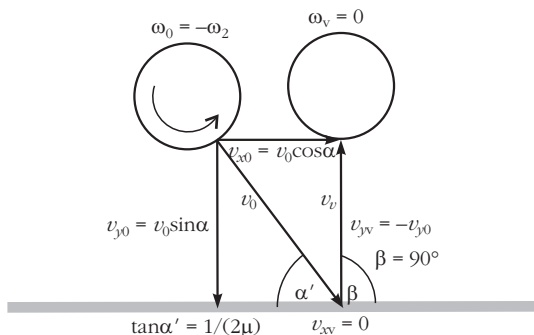
$$\tan\beta(t = t_{ü} < t_{k2}) = \frac{\tan\alpha}{1 - 2\mu \tan\alpha}$$

(5. és 6. ábra). Ilyenkor tehát a  $\beta$  visszapattanási szög nagyobb lesz az  $\alpha$  beesési szögnél a következő határértékekkel (5. ábra):  $\beta(t = t_{k2} < t_{ü}, \omega_0 = \omega_1) = \alpha$  és

$$\tan\beta(t = t_{k2} < t_{ü}, \omega_0 = 0) = \frac{\theta + m R^2}{m R^2} \tan\alpha.$$

Amint az  $\omega_0$  kezdő szögsebesség csökken, a  $\beta$  visszapattanási szög nő, és  $\beta$  a  $\beta(\omega_v = \omega_1) = \alpha \leq \beta \leq \beta(\omega_0 = 0)$  tartományban marad. A 6. ábra vázlatosan szemlélteti a vízszintes sebességet köszörüléssel lassító, előre pörgő, visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változását a talajjal való érintkezés során

7. ábra. Függőlegesen fölfelé visszapattanó labda sebességvektorainak komponensei és szögsebességei, amikor a visszapattanás után a labda nem forog:  $\omega_v = 0$ .



6. ábra. A vízszintes sebességet köszörüléssel lassító, előre pörgő, visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változása a talajjal való érintkezés során, azon eset feltüntetésével, amikor a köszörülés a  $t = t_{k2} < t_{ü}$  időpontban gördülésbe megy át még a  $t_{ü}$  ütközési idő előtt.

azon eset feltüntetésével, amikor a köszörülés a  $t = t_{k2} < t_{ü}$  időpontban gördülésbe megy át még a  $t_{ü}$  ütközési idő előtt.

### Hátrafelé pörgő, a vízszintes sebességet lassító köszörülés

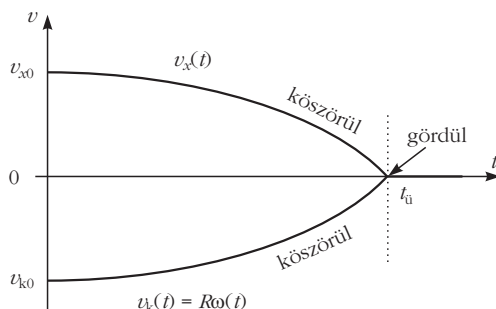
Vegyük most azt az esetet, amikor a labda hátrafelé pörög, vagyis szögsebességvektora jobbra mutat a labda haladási iránya felé nézve, azaz  $\omega_0 \leq 0$ . Ekkor a következő három speciális esetet vizsgáljuk: (i) függőleges fölfelé visszapattanás, (ii) hátrafelé visszapattanás a beesési szögben és (iii) hátrafelé visszapattanás, a végén gördüléssel.

#### Függőleges fölfelé visszapattanás

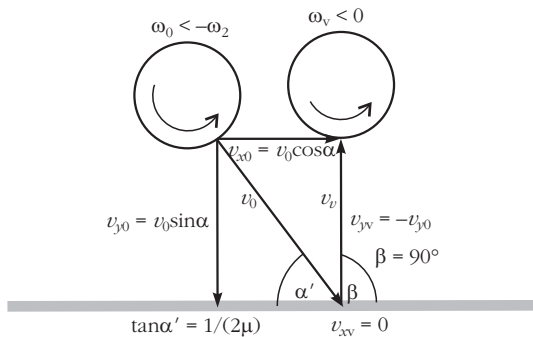
Ha a labda pont függőlegesen pattan vissza, akkor a visszapattanási szög  $\beta = 90^\circ$ . A korábbiak alapján a vízszintes sebességösszetevőt (12) írja le, míg a szögsebesség időbeli változását (13).  $\beta = 90^\circ$  akkor teljesül, ha  $v_x(t_{ü}) = 0$ , ahol  $t_{ü}$  a (4) szerinti ütközési idő. Innen kapjuk az  $\alpha'$  beesési szögre:

$$\tan\alpha' = \frac{1}{2\mu}, \quad (15)$$

8. ábra. Függőlegesen fölfelé visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változása a talajjal való érintkezés során, amikor a visszapattanás után a labda nem forog:  $\omega_v = 0$ .







9. ábra. Függőlegesen fölfelé visszapattanó labda sebességvektorainak komponensei és szögsebességei, amikor a visszapattanás után a labda forog:  $\omega_v < 0$ .

és a visszapattanó labda  $\omega_v$  végső szögsebességére:

$$\omega_v \left( t_u, \tan \alpha' = \frac{1}{2\mu} \right) = \omega_0 + \omega_2 \leq 0, \quad (16)$$

$$\text{ahol } \omega_2 = \frac{2\mu m R v_0}{\theta \sqrt{1 + 4\mu^2}} > 0.$$

Tehát a labda csak akkor pattan vissza pont függőlegesen, ha a beesési szöge

$$\alpha' = \arctan \left( \frac{1}{2\mu} \right),$$

a visszapattanás utáni végsőszögsebessége pedig a (16) szerinti.

A függőlegesen visszapattanó labda visszapattanás utáni szögsebességére két eset lehetséges: a visszapattanó labda (i) nem forog, (ii) hátrafelé forog.

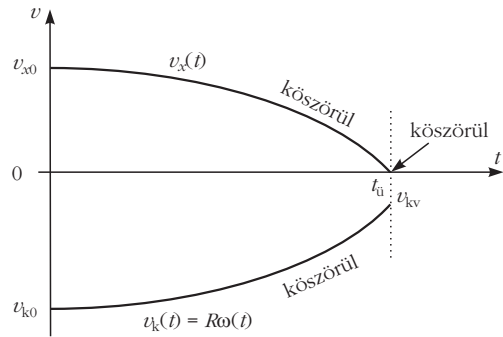
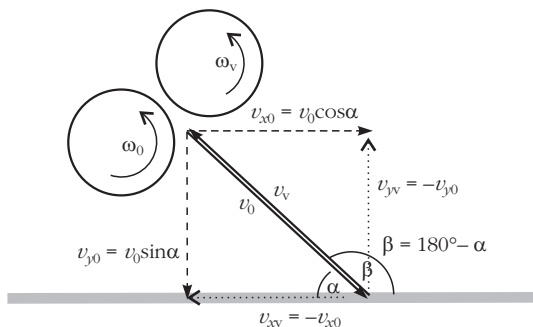
*A függőlegesen visszapattant labda nem forog*

A (16) összefüggés szerint a függőlegesen visszapattanó labda nem forog, azaz  $\omega_v = 0$ , ha  $\omega_0 = -\omega_2$ . Ekkor a 7. és 8. ábra mutatja a visszapattanó labda sebességvektorainak komponenseit és szögsebességeit, valamint vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változását a talajjal való érintkezés során.

*A függőlegesen visszapattant labda hátrafelé forog*

A (16) összefüggés szerint a függőlegesen visszapattant labda hátrafelé forog, vagyis  $\omega_v < 0$ , ha  $\omega_0 < -\omega_2$ .

11. ábra. A hátrafelé visszapattanó labda sebességvektorainak komponensei és szögsebességei.



10. ábra. Függőlegesen fölfelé visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változása a talajjal való érintkezés során, amikor a visszapattanás után a labda hátrafelé forog:  $\omega_v < 0$ .

Ekkor a 9. és 10. ábra mutatja a visszapattanó labda sebességvektorainak komponenseit és szögsebességeit, valamint vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változását a talajjal való érintkezés során.

*Hátrafelé visszapattanás a beesési szögben*

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor a labda ugyanabban az irányban pattan vissza, mint ahonnan érkezett. Ekkor a visszapattanási szög  $\beta = 180^\circ - \alpha = \pi - \alpha$ .

A labda  $v_x(t)$  vízszintes sebességösszetevőjének és  $\omega(t)$  szögsebességének időbeli változását (12) és (13) írja le. A 11. ábráról leolvashatóan:

$$\tan(\beta = \pi - \alpha) = -\tan \alpha = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_x(t_u)}. \quad (17)$$

(12) és (17)-ből kapjuk:

$$\tan \alpha'' = \frac{1}{\mu}, \quad (18)$$

és (18)-at (13)-ba helyettesítve adódik a beesési szögben hátrafelé visszapattanó labda  $\omega_v$  végsőszögsebességére:

$$\omega_v \left( t_u, \tan \alpha'' = \frac{1}{\mu} \right) = \omega_0 + \omega_3 < 0, \quad (19)$$

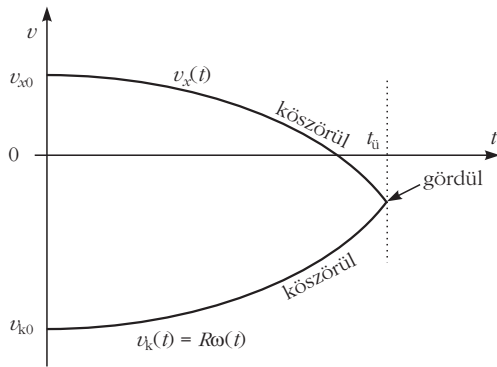
$$\text{ahol } \omega_3 = \frac{2\mu m R v_0}{\theta \sqrt{1 + \mu^2}} > 0.$$

Tehát a labda csak akkor pattan vissza hátrafelé pont a beesési szögben, ha a beesési szöge

$$\alpha'' = \arctan \left( \frac{1}{\mu} \right)$$

és ekkor a visszapattanás utáni szögsebessége a (19) szerinti.

A beesési szögben hátrafelé visszapattanó labda a talajtól való elválás pillanatában már éppen gördül, de előtte végig köszörül, ha az elválás pillanatában a kerületi sebességének nagysága megegyezik a víz-



12. ábra. A beesési szögben hátrafelé visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változása a talajjal való érintkezés során, amikor a talajtól való elválás pillanatában a labda csúszásmentesen gördül, de előtte végig kőszörül:  $v_x(t_0, \alpha'') = R\omega(t_0, \alpha'')$ .

szintes sebességkomponensével:

$$v_x(t_0, \alpha'') = v_k(t_0, \alpha'') = R\omega(t_0, \alpha''), \quad (20)$$

ahol  $t_0$  és  $\alpha''$  kifejezését (4) és (18) szolgáltatja. A (20) összefüggés csak akkor teljesül, ha a labda kezdeti szögsebessége

$$\omega_0 = \omega_4 = -\frac{\mu v_0 (\theta + 2mR^2)}{R\theta\sqrt{1+\mu^2}} < 0. \quad (21)$$

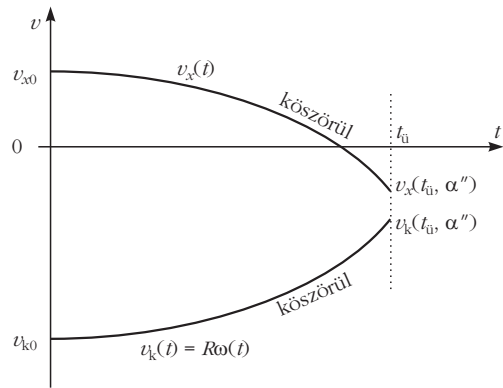
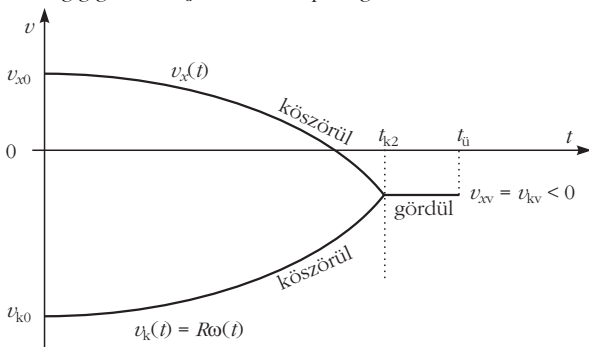
Ekkor a 12. ábra mutatja a labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változását a talajjal való érintkezés során.

Ha viszont  $\omega_0 < \omega_4$ , akkor  $v_x(t_0, \alpha'') > R\omega(t_0, \alpha'')$ , vagyis a beesési szögben hátrafelé visszapattanó labda a talajjal való érintkezés alatt végig kőszörül:  $v_x(t, \alpha'') > R\omega(t, \alpha'')$ . Ekkor a 13. ábra mutatja a labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változását a talajjal való érintkezés során.

### Hátrafelé visszapattanás, a végén gördüléssel

A hátrafelé visszapattanó labda kőszörülése abban a  $t_{k2}$  időpontban szűnik meg és kezd el gördülni, amikor a  $v_x$  vízszintes sebességkomponense egyenlő lesz

14. ábra. A hátrafelé visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változása a talajjal való érintkezés során, amikor a labda a  $t_{k2}$  időpontig kőszörül, majd utána végig gördül a  $t_0$  ütközési időpontig.



13. ábra. A beesési szögben hátrafelé visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változása a talajjal való érintkezés során, amikor a talajjal való érintkezés alatt a labda egyfolytában kőszörül:  $v_x(t, \alpha'') > R\omega(t, \alpha'')$ .

a  $v_k$  kerületi sebességének nagyságával:  $v_x(t_{k2}) = v_k(t_{k2}) = R\omega(t_{k2}) < 0$ ,  $\omega_0 < 0$ , ami (12) és (13) felhasználásával a (14) szerinti  $t_{k2}$  kőszörülési időpontra vezet. Ekkor a 14. ábra mutatja a hátrafelé visszapattanó labda vízszintes sebességkomponensének és kerületi sebességének időbeli változását a talajjal való érintkezés során.

Végül határozzuk meg annak feltételét, hogy a talajjal való érintkezés során egy darabig kőszörül, majd végül egy ideig gördülő labda mikor pattan vissza hátrafelé pontosan a beesési szögben, amikor  $\beta = \pi - \alpha$ . Ekkor a 11. ábráról leolvashatóan:

$$\tan(\beta = \pi - \alpha) = -\tan\alpha = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_x(t_{k2})}.$$

Ennek, valamint (12) és (14) felhasználásával kapjuk:

$$\omega_0 = \omega_5 = -\frac{\theta + 2mR^2}{\theta R} v_0 \cos\alpha < 0. \quad (22)$$

(13), (14) és (22)-ből kapjuk a visszapattanó labda végszögsebességére:

$$\omega(t_k) = -\frac{v_0 \cos\alpha}{R} < 0. \quad (23)$$

Ha tehát a labda kezdő szögsebessége a (22) szerinti  $\omega_5$ , akkor hátrafelé éppen a beesési szögben ( $\beta = \pi - \alpha$ ) pattan vissza, és kőszörülése gördüléssé alakul még a talajtól való elválás előtt, végszögsebessége pedig a (23) szerinti lesz.



Cikkünkben csak olyan függőleges síkban történő visszapattanásokkal foglalkoztunk, amikor a pörgő labda szögsebességvektora vízszintes. A ferdén pörgő labda általános esete bonyolult, mert ekkor a beesési és visszapattanási irány, valamint a vízszintes aljzat normálvektora nem esik egy síkba.

### Irodalom

Szferle Tamás: *Fizika a rögbiben*. B.Sc. Diplomamunka, ELTE TTK, Biológiai Fizika Tanszék, Budapest (2016) (témavezető: Horváth G.)