

A FÖLD FELSZÍNÉN FELLÉPŐ GYORSULÁSOK A DOBÓSPORTOK BIOMECHANIKÁJA HÁTTERÉÜL

1. rész: árapály és forgáslassulás

Pálfi Krisztina, Horváth Gábor – ELTE Biológiai Fizika Tanszék
Slíz-Balogh Judit – ELTE Csillagászati Tanszék

A földfelszíni gyorsulások nagyságrendi sorrendje

A négy fő, olimpiai dobósportág (súlylökés, kalapácsvetés, diszkoszvetés, gerelyhajítás) technikáinak, valamint elméleti és kísérleti (bio)mechanikai tanulmányozásának fejlődése nem állt le [1]. E fejlődés azonban korántsem folyamatos, inkább ugrásszerű, egy-egy új dobótechnikának vagy vizsgálati módszernek köszönhetően. A lézeres távolságméréssel a dobótávok mérési pontossága (1/100 mm) elérte a távhitelesítés maximumát, aminél nagyobb precizításra már nincs szükség. Azon területek egyike – ahol még jelentősebb fejlődés várható – az eldobott (lökött/vetett/hajított) repülő sportszer mozgásának elméleti (számítógépes) és kísérleti (filmelemzéses) vizsgálata. A dobótávok hitelesítése és világcúcsként való elfogadása terén is még van mit tenni, mert az egymást követő világcúcsok közti különbség tendenciózusan egyre csökken, mivel a sportolók teljesítőképessége kezdi elérni a felső határát.

A dobótávok növekedési ütemének telítődési görbével leírható lassulása eredményeként már érdemes lenne figyelembe venni a környezeti tényezők dobótávra kifejtett hatását. Ilyen tényezők a szélesebbesség, tengerszint fölötti magasság, légnyomás, léghőmér-

seket és a dobópálya síkjának vízszintestől való eltérése, valamint a dobóhely földrajzi szélessége és a dobás azimutiránya. Az utóbbi két tényező a Föld tengely körüli forgásából származó tehetetlenségi erőkhöz keresztül fejt ki hatását a dobótávra. Egy $\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ lineárisan gyorsuló és a t időben változó $\boldsymbol{\omega}(t)$ szögsebességvektorú forgást végző rendszerben (amilyen például a Föld is) eldobott m tömegű sportszer (súly, kalapács, diszkosz, gerely) Newton II. törvénye szerinti mozgásegyenletében az \mathbf{F} eredő valódi külső erő által okozott \mathbf{F}/m gyorsulás túl a következő négy fiktív tehetetlenségi gyorsulás lép fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{F}}{m} - \mathbf{a}_{\text{lineáris}} + \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \\ &= \frac{\mathbf{F}}{m} - \mathbf{a}_{\text{lineáris}} + \mathbf{a}_{\text{Euler}} + \mathbf{a}_{\text{Coriolis}} + \mathbf{a}_{\text{centrifugális}}, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol $-\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ az $\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ lineáris gyorsulással ellentétes irányú tehetetlenségi gyorsulás, $\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}$ az $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ szöggyorsulásvektor keltette Euler-gyorsulás, $2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ és $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$ pedig az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor keltette Coriolis- és centrifugális gyorsulás. *Mizera* és *Horváth* [2], *Horváth* [3], valamint *János* és *Bántay* [4] vizsgálták a centrifugális és Coriolis-gyorsulás súlylökés és kalapácsvetés dobótávjait csökkentő/növelő hatásait a forgó és keringő Földön, a Föld lineáris és Euler-gyorsulását elhanyagolhatóan tételezve fel a gravitációs, centrifugális és Coriolis-gyorsulásához, valamint a légellenállás miatti lassuláshoz képest.

Cikkünk célja, hogy a csillagászati és geofizikai szakirodalom áttekintésével a Föld (1)-beli négy tehetetlenségi gyorsulását számszerűen becsljük meg, és nagyságrendi sorba rendezzük annak érdekében, hogy ténylegesen melyikük hatását érdemes figyelembe venni s melyikük hanyagolható el a forgó és keringő Föld felszínén űzött dobósportok dobótávjaira [5]. A hazai és nem-



Pálfi Krisztina 2021-ben szerzett Fizika BSc diplomát az ELTE TTK-n. A *Forgó és keringő Föld tehetetlenségi gyorsulásai a dobósportok biomechanikája háttéréül* című szakdolgozatát az ELTE Biológiai Fizika Tanszékén írta Horváth Gábor témavezetésével. Tanulmányait jelenleg a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar egészségügyi mérnök mesterszakán folytatja. Érdeklődési köre a biofizika és a programozás.



Horváth Gábor fizikus, az MTA doktora, egyetemi tanár, az ELTE Biológiai Fizika Tanszék Környezetoptika Laboratóriumának vezetője. A vizuális környezet optikai sajátosságait és az állatok látását tanulmányozza, továbbá biomechanikai kutatásokat folytat. Számos szakmai díj és kitüntetés tulajdonosa. Évtizedek óta aktív tudományos ismeretterjesztői munkát is folytat előadások és cikkek formájában.



Slíz-Balogh Judit a BME-n végzett matematikus-mérnökként, majd menedzserként dolgozott a Graphisoft SE szoftverfejlesztő cégnél. A Pázmány Péter Katolikus Egyetem Hittudományi szakán hittanári, majd az ELTE-n csillagász diplomát szerzett, ahol 2020 őszén doktorált a Fizika Doktori Iskola Rézecskefizika és Csillagászat programjában. Fő kutatási területe az égi mechanika, azon belül a Naprendszer Lagrange-pontjainak kaotikus dinamikája és képalakító polarimetriája.

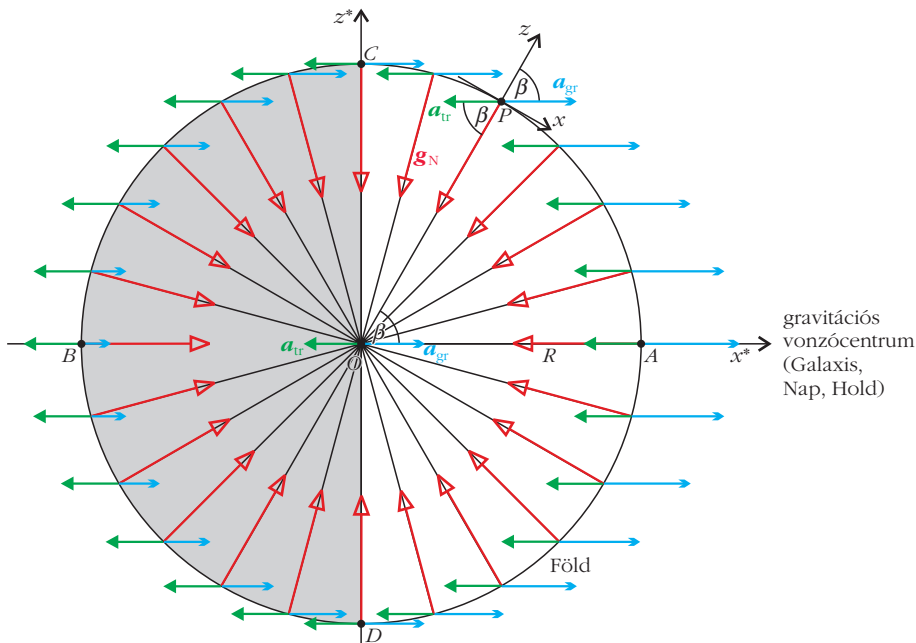
zetközi szakirodalomban egyaránt hiánypótlónak számít az itt közölt csillagászati és geofizikai számítások/becslések egyetlen közleménybeli tömör összefoglalása, ami jól alkalmazható az oktatásban is.

Földfelszíni árapálygyorsulások

A Föld eredő lineáris gyorsulásának három összetevője a Föld Föld-Hold rendszer tömegközéppontja körüli \mathbf{a}_{FH} centripetális gyorsulásából, a Föld (és Hold) Nap körüli \mathbf{a}_{FN} centripetális gyorsulásából és a Naprendszerbeli Föld Tejútrendszer (továbbiakban Galaxis) centruma körüli \mathbf{a}_{FG} centripetális gyorsulásából tevődik össze. Eltekintve az Euler-, Coriolis- és centrifugális gyorsulásoktól, valamint a légellenállástól, vegyük sorra a három gravitációs eredetű centripetális (a Földdel együtt mozgó koordináta-rendszerben centrifugális) gyorsulást külön-külön, s az egyszerűség kedvéért közelítsük a gravitációs vonzócentrum (Galaxis, Nap, Föld-Hold rendszer tömegközéppontja) körüli keringési pályát körrel, ami elsőre megtehető a valódi ellipszis pályák kis excentricitása miatt. Ekkor az (1)-beli \mathbf{F} a vonzócentrumnak az m_{F} tömegű Föld O tömegközéppontjára ható \mathbf{G} gravitációs erejével egyenlő, ami az O $\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ centripetális gyorsulását váltja ki. Az O -val együtt keringő, centripetálisan gyorsuló koordináta-rendszerben O nyugalomban van, azaz (1) szerint $\mathbf{a} = \mathbf{G}/m_{\text{F}} - \mathbf{a}_{\text{lineáris}} = 0$, ami annak felel meg, hogy a \mathbf{G}/m_{F} gravitációs gyorsulást éppen kompenzálja a $-\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ centrifugális gyorsulás (súlytalansági állapot).

Mindebből azonban nem az következik, hogy a Föld felszínén eldobott sportszerre semmi hatása sincs a vonzócentrum körüli keringésnek, hiszen a Föld nem pontszerű, hanem elsőre egy R átlagos su-

1. ábra. A földfelszíni árapálygyorsulás számításához. A nyilakkal szemléltetett \mathbf{a}_{tr} és \mathbf{a}_{gr} gyorsulásvektorok \mathbf{g}_{N} gravitációs gyorsuláshoz képesti hossza nem méretarányos, de az ábra jól szemlélteti az \mathbf{a}_{gr} vektor hosszának csökkenését a β szög növekedésével. Az \mathbf{a}_{tr} és a \mathbf{g}_{N} hossza állandó.



garú gömbbel közelíthető. Márpedig ekkor a Föld felszínén fellép a vonzócentrum (Galaxis, Nap, Hold) helyfüggő gravitációs ereje miatti $\mathbf{a}_{\text{árapály}}$ árapálygyorsulás [6]. E fejezetben e három árapálygyorsulás nagyságát becsüljük meg a Föld sarkain mérhető

$$g_{\text{Newton}} = 9,832 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

Newton-féle gravitációs gyorsuláshoz képest, ami a Föld egész felszínére lenne érvényes, ha a Föld nem forgana.

A galaxiscentrum körüli keringésből származó árapálygyorsulás

A Galaxis (Tejútrendszer) korongjában a centrum körül keringő égitestek a kis pályadőlésszögük miatt jó közelítésben a fősíkkal párhuzamos körpályákon mozognak a rendszer középpontja körül [7]. A Föld O centrumának távolsága a Galaxis középpontjától $r_{\text{FG}} = 25\,800$ fényév $= 2,441 \cdot 10^{20}$ m, keringési ideje pedig $T_{\text{FG}} = 238 \cdot 10^6$ év $= 7,505568 \cdot 10^{15}$ másodperc. A Föld e körmozgásából eredő \mathbf{a}_{FG} lineáris gyorsulása a galaxiscentrum felé mutató centripetális gyorsulással egyezik meg, aminek nagysága:

$$a_{\text{FG}} = r_{\text{FG}} \omega_{\text{FG}}^2 = r_{\text{FG}} \left(\frac{2\pi}{T_{\text{FG}}} \right)^2 \quad (3)$$

A Föld O centrumában a centrifugális erő egyenlő a Galaxis gravitációs vonzerejével:

$$r_{\text{FG}} \left(\frac{2\pi}{T_{\text{FG}}} \right)^2 = \frac{\gamma m_{\text{G}}}{r_{\text{FG}}^2}, \quad (4)$$

itt $\gamma = 6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ az egytetemes gravitációs állandó.

Mivel eltekintettünk a Föld tengely körüli forgásától, ezért a Föld kör menti translációt végezz, miáltal az O tömegközéppontjával együtt minden más pontja is r_{FG} sugarú körpályán mozog

$$\mathbf{a}_{\text{tr}} = \mathbf{a}_{\text{FG}} \quad (5)$$

transzlációs centripetális gyorsulással. Mivel a Föld igen messze van a galaxiscentrumtól, ezért a földfelszín különböző pontjainbeli \mathbf{a}_{tr} gyorsulásvektorokat nyugodtan tekinthetjük egymással párhuzamosnak. Így a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben a földfelszín 1. ábra szerinti tetszőleges P pontjában három gyorsulás hat, \mathbf{a}_{tr} , \mathbf{g}_{N} és

$$a_{\text{gr}} = \frac{\gamma m_G}{(r_{\text{FG}} - R \cos \beta)^2}, \quad (6)$$

ahol m_G a Galaxis tömege az r_{FG} sugarú gömbön belül a galaxiscentrumban összegezve, a β szöget pedig a Galaxis és a Föld centrumát összekötő egyenestől mérjük (1. ábra). A P pontbeli x - z koordináta-rendszerben eldobott sportszer dobótávját elsősorban a helyi \mathbf{a}_{tr} , \mathbf{a}_{gr} és \mathbf{g}_N gyorsulásvektorok függőleges összetevőinek lefelé mutató $g(\beta) = g_N + (a_{\text{tr}} - a_{\text{gr}}) \cos \beta$ eredője határozza meg, ami a Föld O centruma felé irányul. A szóban forgó gyorsulásvektorok vízszintes komponenseinek eredője a dobótávot kevésbé módosítja. Az egymással ellentétes irányú \mathbf{a}_{tr} és \mathbf{a}_{gr} gyorsulásvektorok vízszintes komponenseinek eredője a repülő sportszer pályáját téríti el jobbra vagy balra attól függően, hogy melyikük a nagyobb, továbbá ugyanez a vízszintes összetevő okozza a földi tengerék/óceánok árapálymozgását. Tehát mindkét jelentőségért az $\mathbf{a}_{\text{tr}} - \mathbf{a}_{\text{gr}}$ árapálykeltő eredő gyorsulásvektor a felelős. A Föld az 1. ábra szerinti A és B pontjaiban $\beta_A = 0^\circ$ és $\beta_B = 180^\circ$, míg a C és D pontokban $\beta_C = 90^\circ$ és $\beta_D = -90^\circ$, ahol az eredő függőleges gyorsulások rendre $g_A(\beta_A = 0^\circ) = g_N + (a_{\text{tr}} - a_{\text{gr}})$, $g_B(\beta_B = 180^\circ) = g_N - (a_{\text{tr}} - a_{\text{gr}})$, $g_{C,D}(\beta_{C,D} = \pm 90^\circ) = g_N$. Az árapálygyorsulás függőleges komponensének nagysága:

$$a_{\text{árapály, FG}}(\beta) = \left| (a_{\text{tr}} - a_{\text{gr}}) \cos \beta \right| = \left[r_{\text{FG}} \left(\frac{2\pi}{T_{\text{FG}}} \right)^2 - \frac{\gamma m_G}{(r_{\text{FG}} - R \cos \beta)^2} \right] |\cos \beta|, \quad (7)$$

aminek $\beta = 180^\circ$ -nál van maximuma, mert

$$a_{\text{árapály, FG}}(\beta = 0^\circ) = \gamma m_G \left[\frac{1}{r_{\text{FG}}^2} - \frac{1}{(r_{\text{FG}} - R)^2} \right] < < a_{\text{árapály, FG}}(\beta = 180^\circ) = \gamma m_G \left[\frac{1}{r_{\text{FG}}^2} - \frac{1}{(r_{\text{FG}} + R)^2} \right]. \quad (8)$$

(4)-ből kapjuk:

$$\gamma m_G = r_{\text{FG}}^3 \left(\frac{2\pi}{T_{\text{FG}}} \right)^2, \quad (9)$$

amit (8)-ba helyettesítve adódik:

$$a_{\text{árapály, FG}}(\beta = 180^\circ) = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{FG}}} \right)^2 r_{\text{FG}} \left[1 - \left(\frac{r_{\text{FG}}}{r_{\text{FG}} + R} \right)^2 \right] = 8,924657 \cdot 10^{-24} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,08 \cdot 10^{-25} g_{\text{Newton}}, \quad (10)$$

ahol $r_{\text{FG}} = 2,441 \cdot 10^{20}$ m, $T_{\text{FG}} = 7,505568 \cdot 10^{15}$ s, továbbá $R = 6,3675 \cdot 10^6$ m.

A Nap körüli keringés miatti árapálygyorsulás

A Föld Nap körüli ellipszis alakú Kepler-pályáját egy $r_{\text{FN}} = 1,496 \cdot 10^{11}$ m sugarú körpályának tekinthetjük, ami jó közelítés a valódi ellipszispálya kis $e = 0,0167$ excentricitása miatt. E kört az $R = 6,3675 \cdot 10^6$ m átlagsugarú Föld $T_{\text{FN}} = 1$ év = $365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s = $3,15576 \cdot 10^7$ s alatt járja be. (10)-et a Föld Nap körüli keringésére alkalmazva kapjuk a Nap által kifejtett árapálygyorsulás földfelszínre merőleges, azaz függőleges komponensének maximumára:

$$a_{\text{árapály, FN}} = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{FN}}} \right)^2 r_{\text{FN}} \left[1 - \left(\frac{r_{\text{FN}}}{r_{\text{FN}} + R} \right)^2 \right] = 5,048 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5,13 \cdot 10^{-8} g_{\text{Newton}}. \quad (11)$$

A Föld-Hold rendszer tömegközéppontja körüli keringésből eredő árapálygyorsulás

A Föld-Hold rendszer K tömegközéppontja a Föld $R = 6,3675 \cdot 10^6$ m sugarának 73,4%-nál van. A Föld O középpontjának K -tól mért r_F távolsága:

$$r_F = r_{\text{FH}} \frac{m_{\text{H}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{F}}} = 4,67349 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad (12)$$

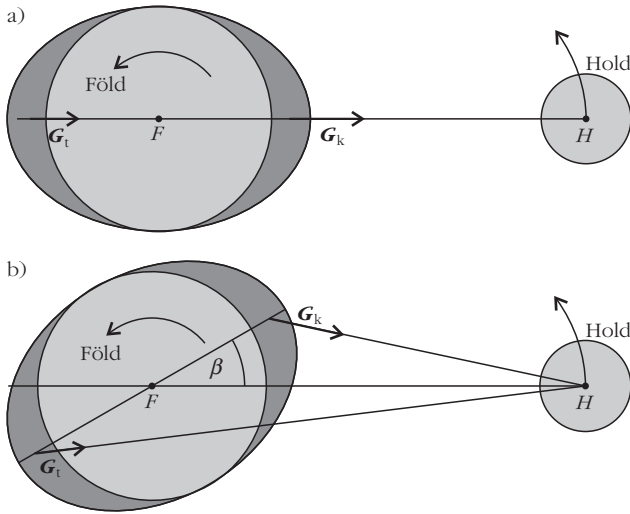
ahol $r_{\text{FH}} = 3,84401 \cdot 10^8$ m a Föld és a Hold középpontjainak távolsága, r_{H} a Hold középpontjának távolsága K -tól, $m_{\text{F}} = 5,9736 \cdot 10^{24}$ kg és $m_{\text{H}} = 7,352 \cdot 10^{22}$ kg pedig a Föld és a Hold tömege. A Holdnak a Föld-Hold rendszer K tömegközéppontja körüli keringési ideje $T_{\text{H}} = 27,3$ nap = $2,35872 \cdot 10^6$ másodperc. A Föld K körüli kis $e = 0,0554$ excentricitású ellipszispályája is elsőre körrel közelíthető. (10)-et a K körül keringő Földre alkalmazva adódik:

$$a_{\text{árapály, FH}} = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{H}}} \right)^2 r_F \left[1 - \left(\frac{r_F}{r_F + R} \right)^2 \right] = 2,72 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2,77 \cdot 10^{-6} g_{\text{Newton}}. \quad (13)$$

A Föld forgás miatti gyorsulásai

A tengely körüli forgás lassulása

A Föld tengely körüli forgásának szögsebesség-változása rövid- és hosszútávon egyaránt föllép. Rövid periódusúnak nevezik az egy évnél nem hosszabb időtartam alatti változásokat. Űrgeodéziai módszerek-



2. ábra. A földi naphossz holdi árapályhatás miatti lassú növekedésének magyarázatához [9] alapján.

kel egy nap vagy néhány óra alatti ingadozások is kimutathatók. Ezek fő oka az árapály, de befolyásolhatják különböző meteorológiai jelenségek vagy meteorbecsapódások is. Egy napnál hosszabb távon a Hold és a Nap keltette árapály okozza a földi nap hosszának igen lassú növekedését [8]. Csillagászati megfigyelések alapján a földi nap hossza évszázadonként átlagosan 1,72 ezredmásodperccel nőtt a 19. és 20. század folyamán [9].

Az Ekliptika északi pólusától lefelé tekintve, a 2.a ábra szemlélteti a Földnek a Hold felé és azzal ellentétesen kidudorodó ellipszoid alakját abban az esetben, ha a Föld anyaga ideálisan rugalmas lenne, vagyis időzésés nélkül követne bármiféle okból eredő alaktorzulást. Ezen ellipszoid oka a Hold gravitációja és a Föld-Hold rendszer K tömegközéppontja körüli keringés keltette centrifugális gyorsulás, ami a Föld egész testében és annak felszínén (például tengermozgás) is az árapályt eredményezi. Ilyen ideális esetben az ellipszoidba írható gömbhöz képesti két kidudorodás, azaz árapálypúp a Föld és a Hold középpontján átmenő FH egyenesen lenne (2.a ábra). Mivel azonban a Föld rugalmatlanul, viszkózus testként reagál a Hold (és Nap) hatására, ezért ezen árapálypúpok nem az FH egyenesen vannak, hanem egy olyanon, ami a Föld forgásának irányába kis β szöggel fordul el (2.b ábra). Az árapálypúpokra a Hold (és Nap) által kifejtett G_k (közelebbi) $> G_t$ (távolabbi) gravitációs erők a Föld forgásával ellentétes irányú eredő forgatónyomatékokat eredményeznek, ami csökkenti a forgás szögsebességét, vagyis növeli a földi nap hosszát. Az árapálypúpokban megnyilvánuló állandó alaktorzulás folyamatos disszipációt kelt a Föld anyagában, mely árapálysúrlódás fűti a Földet [8, 10]. A világóceánok árapálytérképe alapján a szóban forgó késleltetési szög becsült értéke $\beta \approx 5,2^\circ$ a földtörténet utolsó 500-600 millió évében [9].

Az archaikum és proterozoikum földtörténeti eonokra visszamenőleg megbecsülték az akkori földi nap hosszát különféle csillagászati, őslény- és üledéktani

(kagylók, korallok, pörgekarúak, sztromatolitok) adatok alapján. A Föld forgási szögsebességének lassulása miatt a Föld felszínén fellép az (1) szerinti $a_{\text{Euler}} = \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}$ Euler-féle gyorsulás. A Föld jelenlegi forgásiideje $T_1(\text{jelen}) = 1 \text{ nap} = 24 \text{ óra} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$, míg 570 millió évvel ezelőtt $T_2(-570 \cdot 10^6 \text{ év}) = 21 \text{ óra} = 7,56 \cdot 10^4 \text{ s}$ volt [9]. Így a mostani és múltbeli szögsebességek:

$$\omega_1(\text{jelen}) = \frac{2\pi}{T_1} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}},$$

$$\omega_2(-570 \cdot 10^6 \text{ év}) = \frac{2\pi}{T_2} = 8,3111 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}}.$$

Tehát a $\Delta t = 570 \cdot 10^6 \text{ év} = 1,797552 \cdot 10^{16} \text{ s}$ idő alatti szögsebesség-változás $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 1,0389 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ nagyságú. Ezek ismeretében az $R = 6,3675 \cdot 10^6 \text{ m}$ átlagsugarú Föld felszínén a tengelyforgás lassulása miatt fellépő Euler-féle gyorsulás maximuma:

$$\begin{aligned} a_{\text{Euler}}^{\text{max}}(\text{forgáslassulás}) &= R \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \\ &= 3,68 \cdot 10^{-15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \quad (14) \\ &= 3,74 \cdot 10^{-16} g_{\text{Newton}}. \end{aligned}$$

A földi naphossznövekedés őslénytani bizonyítékai

A fák évgyűrűihez hasonlóan más növények és állatok (kagylók, korallok, pörgekarúak, sztromatolitok) is rendelkeznek periodikus növekedéssel, ami követi a környezeti tényezők ritmusát. Ebből nemcsak az egyedek korára és növekedési ütemére lehet következtetni, hanem a földi naphossz változására is. Mivel ezen állatok vázburkában egy nap alatt egy-egy nappali és éjjeli növekedési sáv keletkezik, amely sávpar színe, vastagsága, kémiai összetétele és keménysége évszakosan is változik, ezért jól beazonosíthatók az évek kezdő napjai a napgyűrűk sorozatában. Ez tette lehetővé, hogy megszámlálják az egy év alatt keletkezett napgyűrűpárokat, vagyis hogy hány nappal állt az év az ismert (becsült) korú kagylók, korallok, pörgekarúak, sztromatolitok különböző földtörténeti korokbeli keletkezésekor [11].

Irodalom

- White, C.: *Projectile Dynamics in Sport: Principles and Applications*. Routledge, Abingdon, Oxon, UK, 2011.
- Mizera, F., Horváth, G.: Influence of environmental factors on shot put and hammer throw range. *Journal of Biomechanics* 35 (2002) 785–796.
- Horváth Gábor: *Biomechanika: A mechanika biológiai alkalmazásai*. Egyetemi tankönyv, 3. átdolgozott, bővített kiadás, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2009.
- Jánosi, I., Bántay, P.: Statistical test of throwing events on the rotating Earth: lack of correlations between range and geographic location. *European Physical Journal B* 30(2002) 411–415.
- Pálfi K.: *A forgó és keringő Föld tehetetlenségi gyorsulásai a dobósportok biomechanikája báterűl*. B.Sc. szakdolgozat, ELTE TTK, Biológiai Fizika Tanszék, Budapest, (2021) 38 o.
- Budó Á.: *Kísérleti fizika I. Mechanika, hangtan, hőtan*. 7. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

7. Marik M. (szerkesztő): *Csillagászat*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.
8. Brosche, P., Sündermann, J.: *Tidal Friction and the Earth's Rotation*. Springer: Heidelberg, Berlin, New York, 1978.
9. Varga P.: A naphosszúság változása – Hatásai a Föld és az élet fejlődésére. *Természet Világa* 145 (2014) 546–548.
10. Horváth G.: A holdak kötött keringése, az árapály-effektus és az árapályfűtés. *Fizikai Szemle* 41 (1991) 79–88.
11. Scrutton, C. T.: Periodic growth features in fossil organisms and the length of the day and month. In: Brosche P., Sündermann J. (editors) *Tidal Friction and the Earth's Rotation*. Springer: Heidelberg, Berlin, New York, 1978.