

# A FÖLD FELSZÍNÉN FELLÉPŐ GYORSULÁSOK A DOBÓSPORTOK BIOMECHANIKÁJA HÁTTERÉÜL

## 2. rész: Precesszió, nutáció, Coriolis- és centrifugális gyorsulás

Pálfi Krisztina, Horváth Gábor – ELTE Biológiai Fizika Tanszék  
Slíz-Balogh Judit – ELTE Csillagászati Tanszék

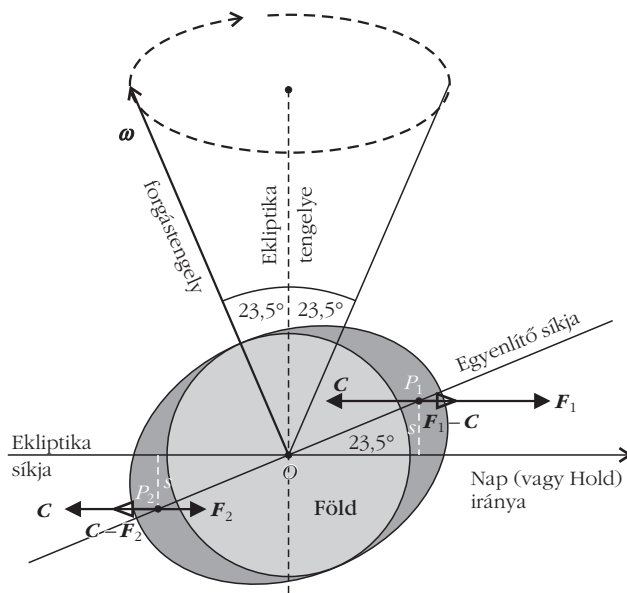
### A Föld forgás miatti gyorsulásai

#### A Föld általános precessziója

A Föld tengely körüli  $\omega$  forgási szögsebességvektorának iránya és nagysága egyaránt folyamatosan változik. Egyrészt e szögsebesség időben csökken, azaz a földi nap hossza nő, amint azt *A tengely körüli forgás lassulása* alfejezetben tárgyaltuk. Másrészt pedig e vektor iránya is változik. Az utóbbi egyik oka a csillagászatban precesszió (latin: *praecessio* = előrenyomulás) nevezett jelenség, ami két fő elemből áll: (i) általános (vagy normál) precesszió, amely magába foglalja a luniszoláris és a planetáris precessziót, valamint (ii) nutáció (latin: *nutatio* = billegés, ingás), amit a geofizikusok precessziózavarnak hívnak [12]. A geofizikában csak a Föld belső tömegátrendeződéseiből eredő pólusmozgást (pólusingadozást, pólusvándorlást) nevezik nutációnak, de ennek a földi tehetetlenségi gyorsulásokra kifejtett igen kicsi hatását a továbbiakban elhanyagoljuk.

#### Luniszoláris precesszió

Földünk forgástengelye egy súlyos pörgettyűjéhez hasonlóan precesszál. A Nap és a Hold gravitációjából származó forgatónyomaték a Föld forgástengelyét a keringési síkra (Ekliptikára) merőleges irányba igyekezik juttatni. Ugyanis, ahogy a 3. ábrán látszik, a Föld



3. ábra. A földi forgástengely luniszoláris precessziója kialakulásának magyarázatához. A Föld forgástengelyének luniszoláris precessziója miatt a földrajzi északi irány különböző csillagképeket érintve egy  $23,5^\circ$  szögsugarú kört ír le a csillagos égen az Ekliptika pólusa körül ([12] alapján).

egy forgási ellipszoid, miáltal Egyenlítője mentén az ellipszoidba írt gömbhöz képest tömegtöbblettel rendelkezik. A Nap és a Hold úgy vonzza e tömegtöbbletet, hogy a kialakuló  $F_1$  és  $F_2$  erőpár eredő forgatónyomatéka az Ekliptika síkjára merőleges helyzetbe igyekezik forgatni a forgástengelyt. A Föld forgási ellipszoiddal közelíthető alakjának egyenlítői sugara  $\sim 21$  km-rel hosszabb, mint a sarkok felé mérhető sugara. Egyenlítői síkja  $\sim 23,5^\circ$ -ot zár be az Ekliptikával, amely síkban a Nap és e sík közelében a Hold és más bolygók is keringenek.

Először nézzük a Nap gravitációs vonzásából adódó forgatónyomaték földi precessziós hatását a 3. áb-



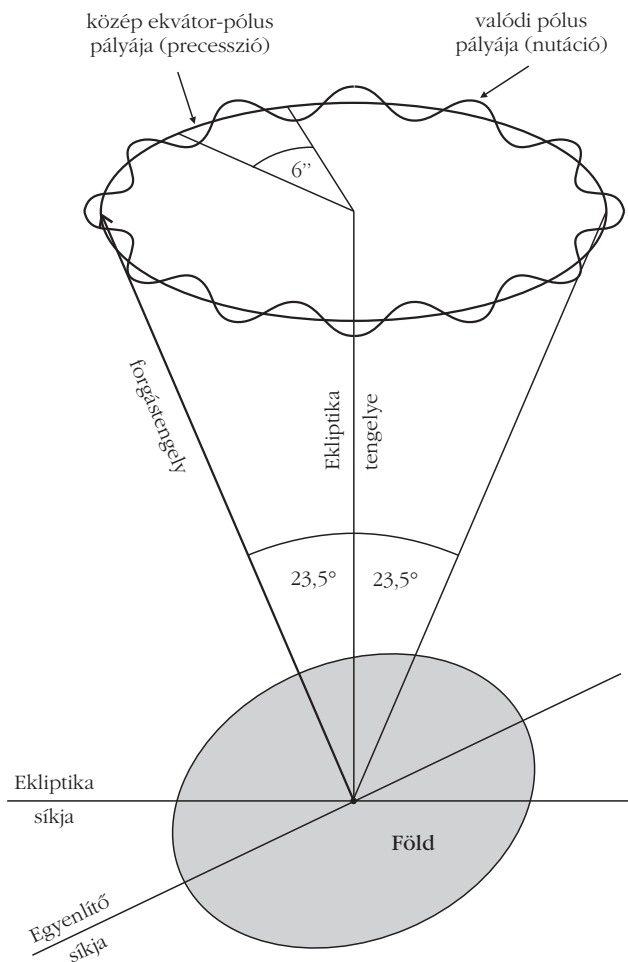
Pálfi Krisztina 2021-ben szerzett Fizika BSc diplomát az ELTE TTK-n. *A forgó és keringő Föld tehetetlenségi gyorsulásai a dobósportok biomechanikája háttéréül* című szakdolgozatát az ELTE Biológiai Fizika Tanszékén írta Horváth Gábor témavezetésével. Tanulmányait jelenleg a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar egészségügyi mérnök mesterszakán folytatja. Érdeklődési köre a biofizika és a programozás.



Horváth Gábor fizikus, az MTA doktora, egyetemi tanár, az ELTE Biológiai Fizika Tanszék Környezetoptika Laboratóriumának vezetője. A vizuális környezet optikai sajátosságait és az állatok látását tanulmányozza, továbbá biomechanikai kutatásokat folytat. Számos szakmai díj és kitüntetés tulajdonosa. Évtizedek óta aktív tudományos ismeretterjesztői munkát is folytat előadások és cikkek formájában.



Slíz-Balogh Judit a BME-n végzett matematikus-mérnöként, majd menedzserként dolgozott a Graphisoft SE szoftverfejlesztő cégnél. A Pázmány Péter Katolikus Egyetem Hittudományi szakán hittanári, majd az ELTE-n csillagász diplomát szerzett, ahol 2020 őszén doktorált a Fizika Doktori Iskola Rézecskefizika és Csillagászat programjában. Fő kutatási területe az égi mechanika, azon belül a Naprendszer Lagrange-pontjainak kaotikus dinamikája és képalakító polarimetriája.



4. ábra. A Föld forgástengelyének luniszoláris precessziója és nutációja.

ra alapján. A Föld a Nap körüli keringésekor a vele együtt mozgó koordináta-rendszerben dinamikus egyensúlyban van, amennyiben a Nap vonzó erejével ellentétes irányú keringési centrifugális erő tart egyensúlyt. A Föld forgási ellipszoidjába írt gömbön (magján) kívüli, Naphoz közelebbi és távolabbi kidudorodó tömegtöbblet középpontja  $P_1$  és  $P_2$ . A Napnak a Föld gömbi magjára ható vonzása e gömb  $O$  középpontjában összpontosul, a dudoroknál pedig a  $P_1$  és  $P_2$  pontokban. Mivel  $P_1$  közelebb van a Naphoz, mint  $P_2$ , ezért a  $P_1$ -re ható és a Naptól mért távolság négyzetének reciprokával csökkenő  $F_1$  vonzóerő nagyobb, mint a  $P_2$ -re ható  $F_2$  vonzóerő. A Nap körüli keringésből származó centrifugális gyorsulás a Föld minden pontjában azonos a Föld  $O$  centrumának  $C$  centrifugális gyorsulásával, miáltal a  $P_1$ -re és  $P_2$ -re ható centrifugális erő ugyanaz a  $C$ . Mindennek eredményeként  $P_1$ -ben  $F_1 - C$  eredő erő hat a Nap felé, míg  $P_2$ -ben  $C - F_2$  eredő erő a Naptól kifelé. Ezen eredő erőpár  $M$  forgatónyomaték-vektora a 3. ábra síkjára merőlegesen befelé mutat, s ezért az  $\omega$  szögsebességvektort az Ekliptika pólusától az Ekliptika felé (a 3. ábrán lefelé) nézve az óramutató járásával egyező irányú precesszióra készíti.

A Naphoz hasonló, de erősebb hatást fejt ki a Földre a Hold is. A Hold Földre gyakorolt precessziós hatása a

Hold közelsége miatt jelentősebb járulékot ad, mint a Nap. Összességében a Nap és a Hold gravitációs vonzásából adódó precessziós mozgást nevezzük *luniszoláris precesszió*nak, a luni = holdi előtaggal utalva a Hold Napénál (szolárisnál) nagyobb hatására. A Föld forgástengelyének precessziója miatt a földrajzi északi irány az idő teltével különböző csillagok irányába néz. Az égi pólus jelenleg az Alfa Ursa Minoris (Polaris) közelében van. A luniszoláris precesszió  $50,37''/\text{év}$  elmozdulást okoz, aminek periódusa közel 25 730 év lenne, ha a Napnak nem létezne több bolygója.

#### Nutáció (precessziózavar)

Különbéféle zavaró erők hatására a Föld forgástengelyének luniszoláris precessziójára bizonyos periodikus tagok rakódnak, amelyeket összefoglalóan *nutáció*nak (billegésnek) neveznek a csillagászok. Közülük a legnagyobb járulékat a Hold pályasíkjának 18,6 év alatt történő körbefordulásából adódik, aminek következtében a forgási szögsebességvektor csúcsa (ekvátorpólusa) nem pontosan körpályán mozog az Ekliptika tengelye körül, hanem egy 18,6 év periódusú,  $6''$  hullámhosszú hullámos vonalat ír le a 4. ábra szerinti módon.

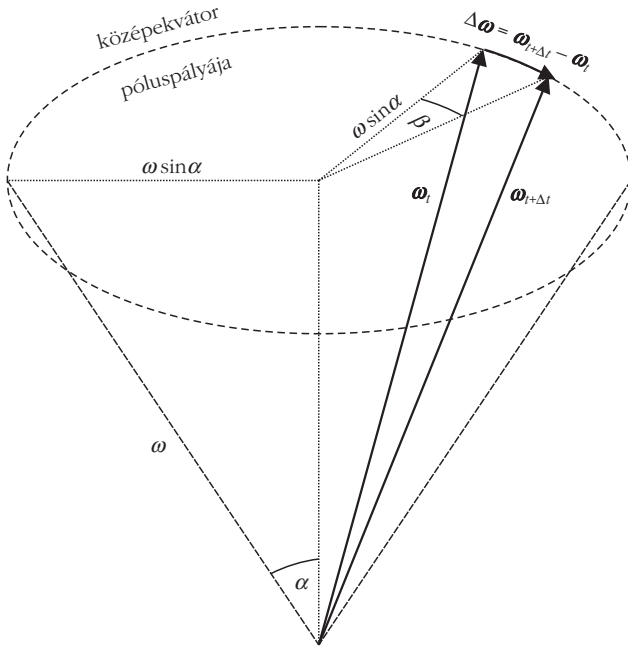
#### Planetáris precesszió

Mivel a Naprendszer többi bolygója nem az Ekliptika síkjában kering a Nap körül, ezért az Ekliptika síkja nem állandó, hanem  $T_{\text{planetáris precesszió}} \approx 40\,000$  év  $= 1,26144 \cdot 10^{12}$  s periódusidővel ingadozik a bolygók közepes pályasíkjához képest. Emiatt a földi Egyenlítő és az Ekliptika síkja közti minimális és maximális szög:  $\alpha_{\min} = 22^\circ$  és  $\alpha_{\max} = 24,5^\circ$ . Így tehát az Ekliptika normálisra 40 000 év alatt körbehalad egy nagyjából  $2,5^\circ$ -os nyílásszögű kúppalást mentén. Az Ekliptika pólusának mozgását is a Föld forgástengelyének precessziójaként észleljük. A csillagászok e jelenséget *planetáris precesszió*nak hívják, amit tehát az Ekliptika síkjának billegése okoz. A planetáris precesszió  $-0,11''/\text{év}$  elmozdulást jelent a tavaszpont mozgásában. A tavaszpont elmozdulása az Ekliptika mentén a luniszoláris precesszió következtében  $+50,37''/\text{év}$ . A kettő eredője  $(+50,37'' - 0,11'')/\text{év} = +50,26''/\text{év}$  az *általános precesszió*, aminek periódusa  $T_{\text{általános precesszió}} \approx 25\,786$  év.

Tehát a luniszoláris és planetáris precesszió összessége az általános vagy más néven normál precesszió. A valóságban a normál precesszió során az Ekliptika síkjának változása miatt az égi pólus, azaz a Föld forgástengelyének északi iránya nem pontosan egy kör mentén mozog, hanem az állócsillagokhoz viszonyítva egy körpályával közelíthető, önmagába nem záródó görbe mentén.

#### Az általános precesszióból származó gyorsulás

A Föld  $\omega$  szögsebességvektorának és a vele azonos irányú forgástengelyének az általános precesszióból származó tehetetlenségi gyorsulás megbecsléséhez közelítsük a luniszoláris és planetáris precesszióból adódó középvektor póluspályáját az 5. ábra szerinti



5. ábra. A Föld  $\omega$  szögsebességvektorának és a vele azonos irányú forgástengelyének általános precessziójából származó tehetetlenségi gyorsulás becsléséhez.

szaggatott vonalú körrel, ami mentén mozog az  $\omega$  vektor csúcsa,  $\omega$  pedig egy  $\alpha = 23,5^\circ$  félnyílásszögű kúppaláston vándorol körbe.

Az 5. ábra szerint a középkvátor póluspályaköre  $\omega \sin \alpha$  sugarának irányá elemi  $\Delta t$  idő alatt

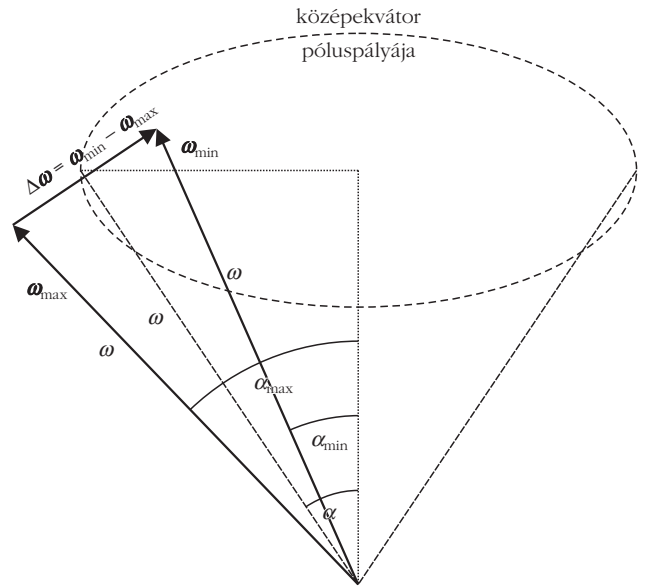
$$\beta = \omega_{\text{általános precesszió}} \Delta t = \frac{2\pi}{T_{\text{általános precesszió}}} \Delta t \quad (15)$$

elemi szöggel változik, ahol  $\omega_{\text{általános precesszió}}$  az általános precesszió szögsebessége. (15) használatával és az 5. ábráról leolvashatóan az  $\omega$  szögsebességvektor általános precesszió miatti  $\Delta t$  idő alatti elemi változásának nagysága:

$$\Delta \omega = \beta \omega \sin \alpha = \frac{2\pi}{T_{\text{általános precesszió}}} \Delta t \omega \sin \alpha. \quad (16)$$

A Föld tengelyforgási szögsebessége  $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , átlagsugara  $R = 6,3675 \cdot 10^6 \text{ m}$ , a forgástengely átlagos  $\alpha = 23,5^\circ$  félnyílásszögű kúppaláston való körbejárásának periódusideje  $T_{\text{általános precesszió}} = 25\,786 \text{ év} = 8,13187296 \cdot 10^{11} \text{ s}$ . Ezen adatok és (16) használatával kapjuk a Föld általános precessziójából eredő tehetetlenségi gyorsulást:

$$\begin{aligned} a_{\text{általános precesszió}} &= R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \\ &= \frac{2\pi R \omega \sin \alpha}{T_{\text{általános precesszió}}} = \\ &= 1,43 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 1,45 \cdot 10^{-10} g_{\text{Newton}}. \end{aligned} \quad (17)$$



6. ábra. A Föld  $\omega$  szögsebességvektorának és a vele azonos irányú forgástengelyének nutációjából (billegéséből) származó tehetetlenségi gyorsulás becsléséhez.

#### A nutációból eredő gyorsulás

A Föld  $\omega$  szögsebességvektora és a vele azonos irányú forgástengelye precessziókúpjának  $\alpha$  félnyílásszöge  $T$  periódusidővel  $\alpha_{\min}$  és  $\alpha_{\max}$  között periodikusan billeg (nutál). Az ilyen nutációból származó tehetetlenségi gyorsulás megbecsléséhez tekintsük a 6. ábrát. A

$$\Delta t = \frac{T}{2} \quad (18)$$

fél periódusidő alatti szögváltozás:

$$\Delta \omega = 2 \omega \sin \left( \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2} \right). \quad (19)$$

(1), (18) és (19) felhasználásával kapjuk az ezen nutáció által az  $R = 6,3675 \cdot 10^6 \text{ m}$  átlagsugarú Föld felszínén keltett  $a_{\text{Euler}} = \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}$  Euler-féle gyorsulás nagyságának maximumát:

$$\begin{aligned} a_{\text{Euler}}^{\text{max}}(\text{nutáció}) &= R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \\ &= \frac{4 \omega R}{T} \sin \left( \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

A planetáris precessziót vizsgálva azt kapjuk, hogy a Föld  $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  szögsebessége  $T = 40\,000 \text{ év} = 1,26144 \cdot 10^{12} \text{ s}$  periódusidővel billeg  $\alpha_{\min} = 22^\circ$  és  $\alpha_{\max} = 24,5^\circ$  között, ami (20) szerint

$$a_{\text{Euler}}^{\text{max}} = 3,20 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,26 \cdot 10^{-12} g_{\text{Newton}}$$

maximális gyorsulást eredményez. A Föld szögsebességvektorának  $T = 18,6 \text{ év} = 586\,569\,600 \text{ s}$  periódusidejű,  $9^\circ = 0,0025^\circ$  amplitúdójú luniszoláris nutációja

során a luniszoláris precessziós kúp fél nyílásszöge  $\alpha_{\min} = 23,4975^\circ$  és  $\alpha_{\max} = 23,5025^\circ$  között billeg (*4. ábra*), ami (20) szerint

$$a_{\text{Euler}}^{\max} = 13,78 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,40 \cdot 10^{-11} g_{\text{Newton}} \quad (21)$$

maximális gyorsulást eredményez.

## Coriolis-gyorsulás

Tekintsünk egy  $v = 20$  m/s tipikus sebességgel repülő sportszert (súlyt, kalapácsot, gerelyt vagy diszkoszot), ami az  $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  szögsebességgel forgó Föld felszínén  $a_{\text{Coriolis}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  Coriolis-gyorsulással bír. Ha  $\boldsymbol{\varphi}$  a  $\mathbf{v}$  és  $\boldsymbol{\omega}$  vektorok közti szög, akkor e gyorsulás  $v\omega \cdot \sin\boldsymbol{\varphi}$  nagysága  $\boldsymbol{\varphi} = 90^\circ$  esetén maximális, aminek értéke

$$\begin{aligned} a_{\text{Coriolis}}^{\max} &= 2 v \omega = 2,91 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 2,96 \cdot 10^{-4} g_{\text{Newton}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ekkor  $\mathbf{v}$  merőleges  $\boldsymbol{\omega}$ -ra. *Mizera és Horváth* [2], valamint Horváth [3] számítógépes modellezéssel részletesen vizsgálták a Coriolis-gyorsulásnak a súlylökés és kalapácsvetés dobótávjait befolyásoló hatását. Arra jutottak, hogy például a férfi kalapácsvetés 86,74 m (1986. évi világcsúcs) dobótávja az Egyenlítőn 4 cm-rel csökkenne a Coriolis-gyorsulás miatt, ha a dobásirány keletről nyugatra változna. Ugyanez a csökkenés 8 mm a férfi súlylökés 23,12 m (1990. évi világcsúcs) dobótávja esetében.

## Centrifugális gyorsulás

Tekintsünk egy repülő sportszert, ami az  $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  szögsebességgel forgó, továbbá  $R = 6,3675 \cdot 10^6$  m átlagsugarú Földön  $a_{\text{centrifugális}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$  centrifugális gyorsulással rendelkezik. E gyorsulás nagysága az Egyenlítőn – amikor a sportszer a Föld forgástengelyétől legtávolabb van – maximális:

$$\begin{aligned} a_{\text{centrifugális}}^{\max} &= R \omega^2 = 3,37 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 3,42 \cdot 10^{-3} g_{\text{Newton}}. \end{aligned} \quad (23)$$

*Mizera és Horváth* [2], valamint Horváth [3] tanulmányozták számítógépes szimulációval e centrifugális gyorsulásnak a súlylökés és kalapácsvetés dobótávjait módosító hatását. Azt találták, hogy a kalapácsvetés 86,74 m dobótávja 45 cm-rel nőne a centrifugális gyorsulás hatására, ha a dobás a Sarkok helyett az Egyenlítőn történne keleti irányban. Ugyanez a növekedés 11 cm a súlylökés 23,12 m dobótávjánál.

1. táblázat

**A forgó és keringő Föld felszínén fellépő gyorsulások becült értékei csökkenő nagyság szerinti sorrendben a Newton-féle gravitációs gyorsuláshoz képest.**

árapálygyorsulás ( $g_{\text{Newton}} = 9,832 \text{ m/s}^2$ )	forgás miatti gyorsulás ( $g_{\text{Newton}} = 9,832 \text{ m/s}^2$ )
	$a_{\text{centrifugális}} = 3,42 \cdot 10^{-3}$
	$a_{\text{Coriolis}} = 2,96 \cdot 10^{-4}$
$a_{\text{Föld-Hold}} = 2,77 \cdot 10^{-6}$	
$a_{\text{Föld-Nap}} = 5,13 \cdot 10^{-8}$	
	általános precesszió: $a_{\text{Euler}} = 1,45 \cdot 10^{-10}$
	luniszoláris nutáció: $a_{\text{Euler}} = 1,40 \cdot 10^{-11}$
	planetáris precessziókori nutáció: $a_{\text{Euler}} = 3,26 \cdot 10^{-12}$
	forgáslassulás: $a_{\text{Euler}} = 3,74 \cdot 10^{-16}$
$a_{\text{Föld-Galaxis}} = 9,08 \cdot 10^{-25}$	

## Összegzés és következtetés

Az *1. táblázatban* foglaltuk össze a cikkünkben megbecsült földfelszíni gyorsulások értékeit. Látható, hogy az árapálygyorsulások: az  $a_{\text{Föld-Hold}}$ , az  $a_{\text{Föld-Nap}}$ , az  $a_{\text{Föld-Galaxis}}$ , továbbá az általános precesszió, a luniszoláris nutáció, a planetáris precessziókori nutáció és a forgáslassulás  $a_{\text{Euler}}$  gyorsulásai a  $g_{\text{Newton}} = 9,832 \text{ m/s}^2$  Newton-féle gravitációs gyorsulásnak nagyságrendileg csak  $10^{-6}$ – $10^{-25}$ -öd hányadát teszik ki, miáltal nyugodtan elhanyagolhatók.

Ugyanakkor az  $a_{\text{centrifugális}}$  és az  $a_{\text{Coriolis}}$  gyorsulás nagyságrendben  $10^{-3}$ -ad és  $10^{-4}$ -ed része a  $g_{\text{Newton}}$ -nak, amelyeket már érdemes figyelembe venni a dobósporkok dobótávjainak mérésében, illetve hitelesítésében.

Arra a végkövetkeztetésre jutottunk tehát, hogy a vizsgált 9 gyorsulás közül csak az  $a_{\text{centrifugális}}$  és az  $a_{\text{Coriolis}}$  gyorsulásokat kell figyelembe venni a dobótávra kifejett hatásukban, az árapály és forgás miatti többi 7 gyorsulás pedig elhanyagolható. A kalapácsvetés és súlylökés dobótávjait az  $a_{\text{centrifugális}}$  dm, illetve cm nagyságrendben képes változtatni, míg az  $a_{\text{Coriolis}}$  cm, illetve mm nagyságrendben [2, 3, 4].

## Irodalom

- Mizera, F., Horváth, G.: Influence of environmental factors on shot put and hammer throw range. *Journal of Biomechanics* 35 (2002) 785–796.
- Horváth Gábor: *Biomechanika: A mechanika biológiai alkalmazásai*. Egyetemi tankönyv, 3. átdolgozott, bővített kiadás, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2009.
- Jánosi, I., Bántay, P.: Statistical test of throwing events on the rotating Earth: lack of correlations between range and geographic location. *European Physical Journal B* 30(2002) 411–415.
- Völgyesi Lajos: A Föld precessziós mozgása. *Fizikai Szemle* 63 (2013) 152–156.