V.2. A víz mozgása a hullámokban

Szinte mindnyájan álltunk már tengerparton és gyönyörködtünk a part felé görgő hatalmas hullámokban.

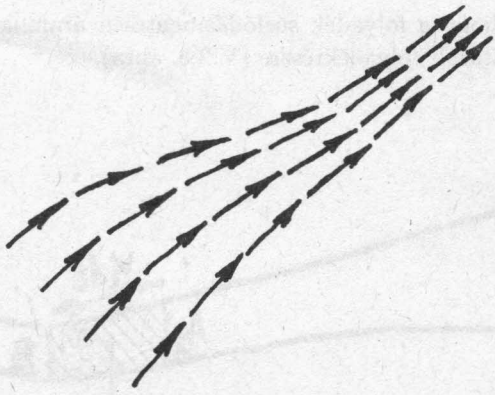
A vízhullámok mozgása számtalan fizikai kérdést vet fel. Vajon milyen sebességgel mozognak a hullámok, mekkorára nőhetnek a hullámhegyek, milyen mélységig kavarja fel a tenger vizét a hullámzás?

Mindezekre a kérdésekre néhány egyszerű fizikai összefüggés figyelembevételével könnyen válaszolhatunk. A két alapvetően fontos összefüggés egyike a víz összenyomhatatlanságát és a megmaradást kifejező kontinuitási egyenlet, másika a munkatételnek az áramlásokra megfogalmazott speciális alakja, a Bernoulli-egyenlet. Ezek az összefüggések a középiskolai tananyag alapján egyszerűen levezethetők. Sok iskolában azonban nem kerülnek be a tananyagba, ezért először röviden megmutatjuk levezetésüket.

V.2.1. A víz áramlásának leírása

A folyadékok mozgása az eddig vizsgált testek — sportszerek, gépkocsik stb. — mozgásához képest szinte áttekinthetetlenül bonyolultnak tűnik. Az áramló folyadékban kiválasztott folyadékcsepp szétfolyhat és tökéletesen követhetetlenül elkeveredhet a folyadékban. Ejtsünk pl. egy kávécseppet egy tejjel töltött pohárba, majd lassan keverjük el. Eleinte még követhető a kávécsepp alakjának változása, végül azonban csak a folyadék enyhén barnás színe jelzi, hogy a tejespohárba kis mennyiségű kávé is került.

A bonyolult keveredési folyamatok miatt a folyadékok mozgásának vizsgálatakor általában nem egy kiválasztott folyadékrészecske mozgását követjük — bár esetenként erre is szükségünk lehet —, hanem Euler nyomán azt vizsgáljuk, hogy az áramlási tér adott helyén mekkora sebességgel mozog a folyadék — függetlenül attól, hogy melyik folyadékrészecske van éppen az adott helyen.



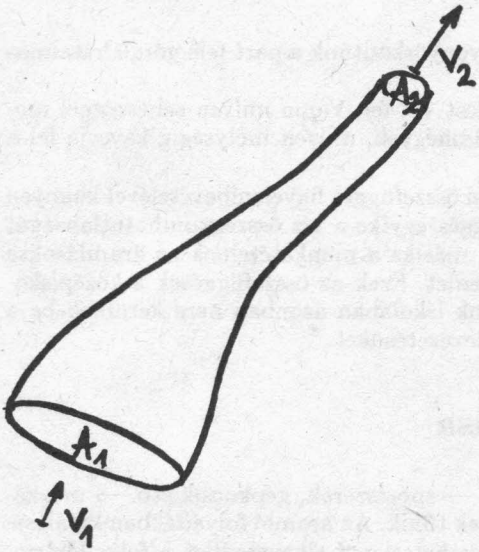
V.2.1. ábra

Ez a leírásmód — a sebességmező megadása — nagyon alkalmas a folyadékok „viszonylag nyugodt" áramlásának leírására. A „viszonylag nyugodt" áramlás azt jelenti, hogy az áramlási térben megrajzolt sebességvektorok folytonos vonalakká — áramvonalakká — állnak össze (V.2.1. ábra), s az egyes áramlási csövek közötti folyadékrészek között nincs keveredés, azaz az áramlásban nem keletkeznek örvények.

További egyszerűsítést jelent, ha a folyadékáramlás időben állandó (stacionárius), ami azt jelenti, hogy az áramlási tér adott helyén a folyadékrészecskék sebessége állandó.

Ezek a feltételek jó közelítéssel teljesülnek a tengerhullámzásra. A bevezetésben említett törvények könnyen felírhatók.

V.2.1.1. A kontinuitási egyenlet



V.2.2. ábra

Válasszuk ki az időben állandó áramlásnak egy áramvonalakkal határolt részét (V.2.2. ábra). Legyen a tágabb keresztmetszet A_1, a szűkebb A_2, s jelöljük ezeken a helyeken az áramlás sebességét rendre v_1-gyel és v_2-vel.

Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor az A_1 keresztmetszeten egységnyi idő alatt beáramló folyadék térfogatának meg kell egyeznie az A_2 keresztmetszeten át távozó folyadék térfogatával, azaz

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Ezt az összefüggést nevezzük kontinuitási egyenletnek.

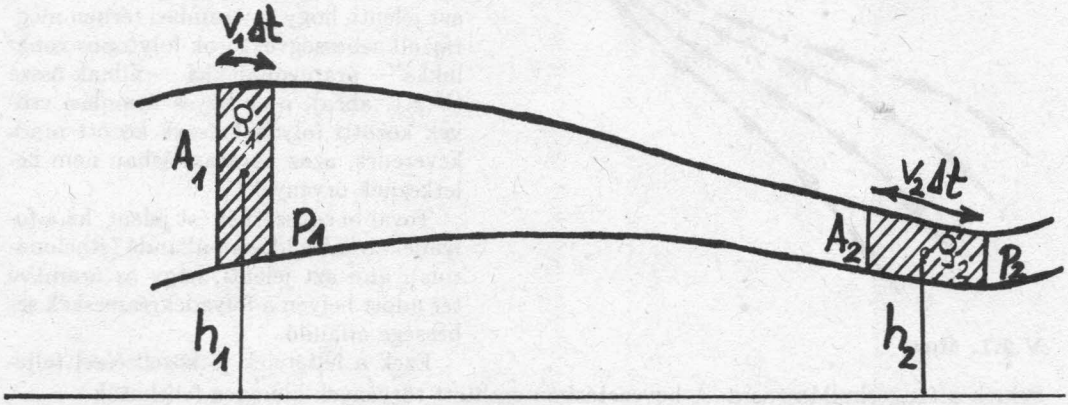
Az egyenlet mutatja, hogy szűkületben az áramló folyadék sebessége nő, tágulatban pedig csökken.

Ha a folyadék sűrűsége is változhat, akkor az A_1 keresztmetszeten egységnyi idő alatt beáramló tömegnek kell megegyeznie az A_2-n kiáramló tömeggel, azaz

$$A_1 \varrho_1 v_1 = A_2 \varrho_2 v_2.$$

V.2.1.2. A Bernoulli-törvény

Az eddigi feltételeket egészítsük ki azzal, hogy a folyadék súrlódásmentesen áramlik. Írjuk fel a munkatételt egy áramvonalakkal határolt folyadékrészre (V.2.3. ábra).



V.2.3. ábra

Legyen az A_1 belépő keresztmetszetben a folyadék sebessége v_1, nyomása p_1, sűrűsége ϱ_1, súlypontjának magassága pedig h_1. Az A_2 kilépő keresztmetszetben legyenek ezek az adatok A_2, v_2, ϱ_2 és h_2.

A munkatétel értelmében a nyomóerők által Δt idő alatt végzett

$$W_{ny} = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t$$

munka és a nehézségi erő W_n munkája egyenlő a vizsgált rendszer mozgási energiájának megváltozásával. Kicsiny Δt idő alatt a bal oldali határfelület $v_1 \Delta t$-vel kerül távolabbra eredeti helyétől, a jobb oldali pedig $v_2 \Delta t$-vel. A változó helyzetű $A_1 v_1 \Delta t$ és $A_2 v_2 \Delta t$ térfogatokat satírozással jelöltük. A satírozott térfogatok közötti részen sem a mozgási, sem a helyzeti energia nem változik. A teljes folyadékrészen a nehézségi erő által végzett munka tehát a két satírozott térrészbe eső folyadék helyzeti energiájának különbségével egyenlő:

$$W_n = A_1 v_1 \Delta t \varrho_1 g h_1 - A_2 v_2 \Delta t \varrho_2 g h_2.$$

A mozgási energia megváltozása pedig

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} A_2 v_2 \Delta t \varrho_2 v_2^2 - \frac{1}{2} A_1 v_1 \Delta t \varrho_1 v_1^2.$$

A munkatétel szerint:

$$W_{ny} + W_n = \Delta E_k,$$

tehát

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t + A_1 v_1 \Delta t \varrho_1 g h_1 - A_2 v_2 \Delta t \varrho_2 g h_2 = \frac{1}{2} A_2 v_2 \Delta t \varrho_2 v_2^2 - \frac{1}{2} A_1 v_1 \Delta t \varrho_1 v_1^2.$$

Végigosztva az egyenletet a Δt idő alatt be-, illetve kiáramló, s a kontinuitási egyenlet értelmében egymással egyenlő

$$\Delta m = A_1 \varrho_1 v_1 \Delta t = A_2 \varrho_2 v_2 \Delta t$$

tömeggel, azt kapjuk, hogy

$$\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2} + g h_1 - g h_2 = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2.$$

Az azonos indexű tagokat egy oldalra rendezve adódik, hogy

$$\frac{p_1}{\varrho_1} + g h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\varrho_2} + g h_2 + \frac{1}{2} v_2^2.$$

Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, és ekkor a fenti egyenlet a

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + \varrho g h_2$$

alakban is felírható. Minthogy az 1 és 2 felületek kiválasztásakor semmilyen feltevést sem tettünk, az összefüggés azt fejezi ki, hogy az áramlási tér bármely helyén

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h = \text{állandó}.$$

Ezt az összefüggést nevezzük Bernoulli-törvénynek.

V.2.2. Tengeri hullámok

A fenti előkészítés birtokában már megkísérelhetjük a tenger hullámzásának megértését. Természetesen ismét sok egyszerűsítő feltevéssel élünk, hogy a hullámzást egyszerű egyenletekkel írhassuk le. A tenger hullámait az árapály és a szél hozza létre. Foglalkozzunk most csak az utóbbiakkal.

A szél hatására fodrozódó vízfelszínen a hullámhegyek és hullámvölgyek úgy alakulnak ki, hogy a felmagasodó vízfelszín felett a szél meggyorsul — a nyomás a Bernoulli-törvény értelmében csökken, így a hullámhegy méginkább növekszik. Természetesen a hullámhegynövekedésnek a helyzeti energia növekedése határt szab.

V.2.2.1. A hullámok terjedési sebessége

Tegyük fel most, hogy a tenger felszínén már kialakultak a c sebességgel haladó A amplitúdójú hullámok, s a szél már nem fúj. Vizsgáljuk meg, hogy milyen mozgást végeznek ebben a hullámban a vízrészecskék, és mitől függ a terjedési sebességük.

Jogos feltételezésnek tűnik, hogy a vízfelszíni részecskék a hullámzó vízben függőleges irányban harmonikus rezgőmozgást végeznek, tehát kitérésük egy adott helyen pl. az

$$y = A \cos \omega t$$

összefüggés szerint változik.

Tegyük fel továbbá, hogy a hullámzás során a víz súrlódásmentesen mozog és örvényképződés sem történik. Ebben az esetben alkalmazható a Bernoulli-egyenlet.

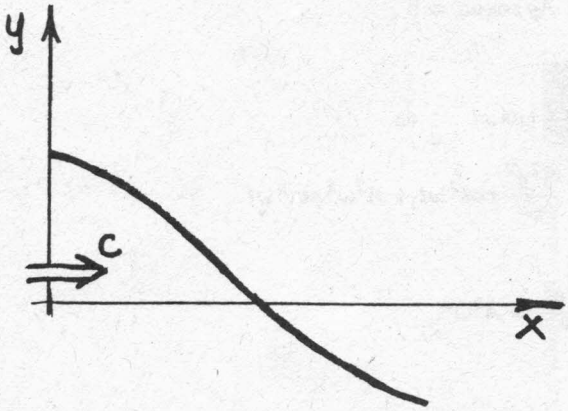
Ez valóban lehetséges is, további meggondolásokat is kell azonban tennünk.

A Bernoulli-egyenlet levezetésekor kihasználtuk, hogy a vizsgált áramlás időben állandó. A c sebességgel terjedő hullám esetén a tengerfenékhez rögzített koordináta-rendszerben az áramlás nyilvánvalóan nem időben állandó, hiszen a hullám érkezése előtt a vízrészecskék nyugalomban vannak, áthaladása után pedig már mozognak.

A probléma azonban egyszerűen megoldódik, ha koordináta-rendszerünket a c sebességgel haladó hullámhoz rögzítjük. Ebben a koordináta-rendszerben a tengervíz mozgása már stacionárius, egy adott helyen az éppen ott elhelyezkedő folyadék sebessége állandó.

Milyen alakú folyadékfelszínt látunk ebben a koordináta-rendszerben, és hogyan mozognak a felszíni részecskék?

Tegyük fel, hogy a hullámok balról jobb felé mozognak, s vegyük fel az ábrán látható derékszögű koordináta-rendszert, melynek origója a nyugvó víz felszínének magasságában éppen egy hullámhegynél helyezkedik el, s a hullámok c sebességével mozog.



V.2.4. ábra

Ebben a koordináta-rendszerben a víz felszínének alakja egy időben állandó görbe vonal, s a felszín adott pontjában lévő részecske sebessége időben nem változik. A felszín adott pontjában azonban mindig más és más részecske helyezkedik el. Egy kiválasztott vízrészecske tehát ehhez a koordináta-rendszerhez képest is mozog! Teljesül azonban az, hogy a víz felszínén elhelyezkedő részecske mindig a víz felszínén marad. Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet arra a folyadékrészre, amely a $t = 0$ időpillanatban az origóban volt, és a t időpillanatban az $x = 1$ helyen található.

Ennek a részecskének a sebességösszetevői a t időpillanatban

$$\nu_x(t) = v_x(t) - c$$
$$\nu_y(t) = v_y(t) = -A\omega \sin \omega t,$$

ahol $v_x(t)$ és $v_y(t)$ a nyugvó koordináta-rendszerbeli, $\nu_x(t)$ és $\nu_y(t)$ pedig a hullámhoz rögzített koordináta-rendszerben vett sebességeket jelentik.

Látszólag ellentmondást jelent, hogy a Bernoulli-törvény időben állandó áramlásra vonatkozik, s ekkor a sebességek nem függhetnek az időtől, ugyanakkor $v_y(t)$ és $v_x(t)$ esetén is időfüggést tételeztünk fel. Itt kihasználjuk, hogy a víz felszínén elhelyezkedő részecskék mindig a felszínen maradnak, és a sebességet nem egy adott helyen, hanem a $t = 0$ pillanatban az origóban tartózkodó részecskére vonatkozóan írjuk fel.

A Bernoulli-egyenlet ezek után a

$$p_0 + \frac{1}{2}\varrho\Big[(v_x - c)^2 + v_y^2\Big] + \varrho g y = \text{állandó}$$

alakban írható fel.

Az összefüggés tovább egyszerűsödik, ha figyelembe vesszük, hogy a hullámok felett p_0 is gyakorlatilag állandó, azaz

$$\frac{1}{2}\Big[\varrho(v_x - c)^2 + v_y^2\Big] + \varrho g y = \text{állandó}.$$

Elvégezve a négyzetre emelést, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\varrho v_x^2 - \varrho v_x c + \frac{1}{2}\varrho c^2 + \frac{1}{2}\varrho A^2\omega^2 \sin^2 \omega t + \varrho A g \cos \omega t = \text{állandó}.$$

Kettővel beszorozva és a négyzetes és lineáris tagokat összerendezve, az összefüggés:

$$\varrho(v_x^2 + A^2\omega^2 \sin^2 \omega t) - \varrho(v_x c - A g \cos \omega t) = \text{állandó}.$$

A két tag összegének állandósága biztosítható például úgy, hogy a

$$v_x c - Ag\cos\omega t = 0$$

választással élünk. Ekkor ugyanis

$$v_x = \frac{Ag}{c}\cos\omega t \qquad \text{és}$$

$$v_x^2 + A^2\omega^2\sin^2\omega t = \frac{A^2g^2}{c^2}\cos^2\omega t + A^2\omega^2\sin^2\omega t.$$

Ez utóbbi akkor állandó, ha

$$\frac{A^2g^2}{c^2} = A^2\omega^2,$$

hiszen ekkor

$$\frac{A^2g^2}{c^2}\cos^2\omega t + A^2\omega^2\sin^2\omega t = A^2\omega^2.$$

Ez azt jelenti, hogy ω körfrekvenciájú függőleges mozgást feltételezve a hullámok terjedési sebességére

$$c = \frac{g}{\omega}$$

adódik. Figyelembe véve, hogy c terjedési sebesség esetén a hullámhossz

$$\lambda = cT$$

és $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$, a hullám terjedési sebessége a

$$c = \frac{g\lambda}{2\pi c}$$

egyenlet alapján a szokásosabb

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

alakban is kifejezhető.

Megjegyzések: 1. Ez az ún. mélyvízi hullámok terjedési sebessége, ami jelentősen eltér a sekély vízben terjedő hullámok sebességétől. Az eltérés oka az, hogy sekély vízrétegek esetén a felületi feszültségből eredő hatásokat is figyelembe kell venni, amit a fentiekben a $p_0 =$ állandó feltételezéssel automatikusan elhanyagoltunk.

2. A Bernoulli-egyenlet bal oldalán szereplő lineáris és négyzetes tagokra alkalmazott feltevések igen önkényesnek tűnhetnek. Belátható azonban, hogy a két tag összegének állandósága valóban csak a most leírt módon valósítható meg.

V.2.2.2. A hullámok magassága

Megállapítottuk, hogy a hullámok terjedési sebessége és hullámhosszúsága (periódusideje) között egyértelmű összefüggés van. A hullámok terjedési sebességének maximális értéke

azonban jó közelítéssel megegyezik a tenger felett fújó szél sebességével, ami a legnagyobb viharokban tartósan legfeljebb *100–150 km/h* lehet. Így a

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

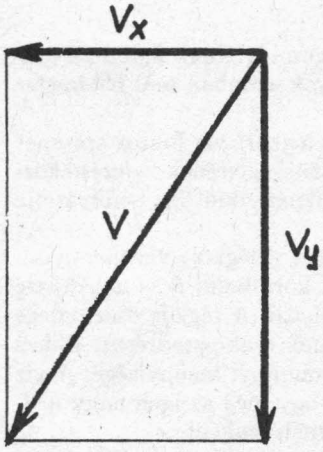
összefüggés alapján a legnagyobb lehetséges hullámhosszra $\sim 1\ km$ adódik.

Természetesen a hullámzó tengeren sokféle különböző hullámhosszúságú hullám lehet jelen egyszerre. Az óriáshullámok éppen úgy alakulnak ki, hogy többféle különböző hullámhosszúságú (egyben különböző periódusidejű) hullám találkozik egy adott helyen egymást erősítő módon.

Ezeknek a felerősödő hullámoknak az eredményeképpen akár *35 m* magas tengeri hullám is létrejöhet.

Az óriáshullámok azonban nem maradnak fenn sokáig, mert a különböző hullámhosszúságú hullámkomponensek különböző sebességgel is terjednek, s az óriáshullám hamarosan szétfolyik.

V.2.2.3. A vízrészecskék mozgása a hullámban



V.2.5. ábra

Az V.2.2.1. fejezetben megállapítottuk, hogy ha a hullámmozgást végző vízrészecskék függőleges irányban az

$$y = A\cos\omega t$$

függvény szerint mozognak, akkor vízszintes irányban sebességük a Bernoulli-törvény értelmében a

$$v_x = A\omega\cos\omega t$$

függvény szerint változik. A függőleges sebességösszetevő a harmonikus mozgásnak megfelelően

$$v_y = -A\omega\sin\omega t.$$

A sebességösszetevőket négyzetre emelve és összeadva azonnal adódik, hogy a tengerfenékhez rögzített koordináta-rendszerben a vízrészecskék állandó nagyságú

$$v = A\omega$$

sebességgel mozognak. Ugyanakkor az is látható, hogy a sebességvektor iránya a

$$\left|\frac{v_y}{v_x}\right| = \mathrm{tg}\omega t$$

összefüggésnek megfelelően változik, azaz ha az állandó nagyságú v sebességet mindig egy pontból mérjük fel, akkor végpontja egyenletes ω szögsebességgel vándorol egy körvonalon.

Ezek az összefüggések az egyenletes körmozgást végző részecskékre jellemzők.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a c sebességgel terjedő hullámban a víz felszíni részecskéi a parthoz rögzített koordináta-rendszerben ω szögsebességű körmozgást végeznek, melynek sugara megegyezik a hullám A amplitúdójával. Az eredmény jól egyezik a kísérleti tapasztalattal.