

MILYEN GYORSAN HALADJUNK ESŐBEN, HOGY MINÉL KEVÉSBÉ ÁZZUNK EL?

Egy elmélet és egy kísérlet ellentétes eredményeinek igazságtartalmáról

Horváth Gábor, Szerle Tamás Áron
ELTE Fizikai Intézet, Biológiai Fizika Tanszék

Esőben gyakran futni kezdünk, hogy minél előbb egy esőmentes helyre érjünk, mert a lehető legkevésbé akarunk elázni. Egy speciális esetben csak a fejünk és vállunk ázik el, máskor főleg a fejünk, vállunk és testünk eleje, vagy leginkább a fejünk, vállunk és testünk hátsó felülete. Vajon mikor melyik? Mekkora sebességgel érdemes haladnunk, hogy minél kevésbé legyünk vizesek? Hogyan függ mindez az esőcseppek sebességétől és irányától? Mit mond erről a videomédia? Egy elmélet sze-

rint esőben futni érdemes, ha kevésbé akarunk vizesek lenni, egy kísérletben viszont arra jutottak, hogy inkább gyalogoljunk, ha kevésbé akarunk elázni. Mi az oka az elmélet és kísérlet ellentétes eredményeinek? Melyiknek van igaza? Cikkünkben e minden esőben mozgó embert érintő kérdéseket válaszoljuk meg.



Az esőben haladás egy speciális esetével meteorológusok foglalkoztak [1]. Ők azt a legegyszerűbb helyzetet vizsgálták, amikor függőlegesen és állandó sebességgel hulló, egyenletes térbeli és időben nem változó cseppeloszlású esőben egy téglatest konstans sebességgel tesz meg egy adott távolságot. Elemi számításokkal arra a következtetésre jutottak, hogy a téglatest vízszintes felső és függőleges mellső felületét együttesen annál kevesebb esőcsepp éri, minél nagyobb sebességgel mozog.

A videomédiát is foglalkoztatta a függőlegesen hulló esőben haladás optimális sebességének kérdése. Cikkünk végén egy magyar [2] és egy amerikai [3] videofilmet említünk és veszünk górcső alá. Cikkünkben a számításainkat azon általánosabb esetre végezzük, amikor az eső az x vízszintes és z függőleges síkkal párhuzamosan hullik a függőlegestől mért $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ szögben, s egy téglatest az x tengellyel párhuzamosan mozog állandó v sebességgel az 1. ábra szerinti módon, nevezéktannal és jelölésekkel. A téglatestet érő eső mennyiségét számítjuk ki.

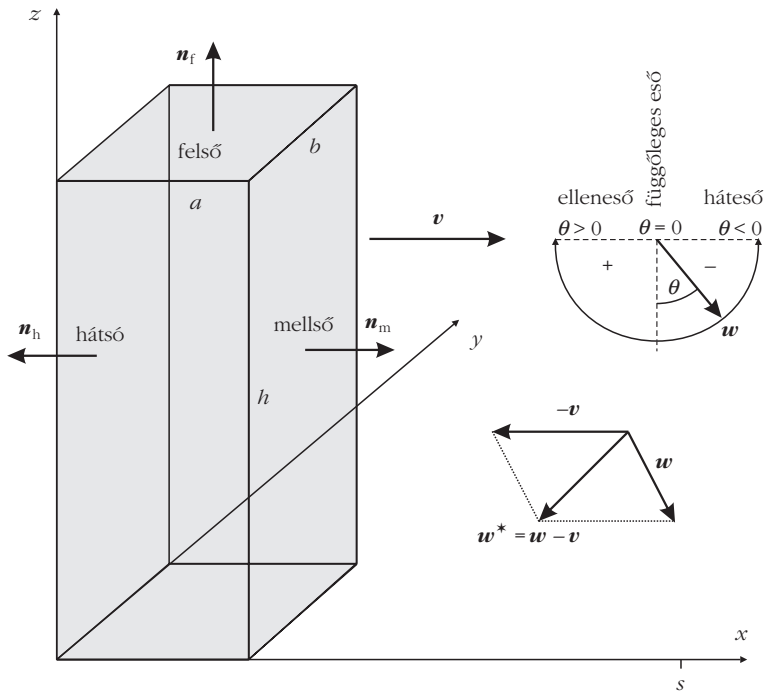
Téglatestünk legyen a z tengely mentén h magasságú, az x tengely mentén a hosszúságú és az y tengely mentén b szélességű (1. ábra), és mozogjon állandó



Horváth Gábor fizikus, az MTA doktora, egyetemi tanár, az ELTE Biológiai Fizika Tanszék Környezetoptika Laboratóriumának vezetője. A vizuális környezet optikai sajátosságait és az állatok látását tanulmányozza, továbbá biomechanikai kutatásokat folytat. Számos szakmai díj és kitüntetés tulajdonosa. Évtizedek óta aktív tudományos ismeretterjesztői munkát is folytat előadások és cikkek formájában.



Szerle Tamás Áron az ELTE fizika-földrajz tanárszakos hallgatójaként és amatőr rögbijátékosként BSc szakdolgozatát a rögbi fizikájáról írta, míg MA diplomamunkájának címe *Kísérleti fizika földrajzórán* volt Horváth Gábor vezetésével. 2019-ben szerzett tanári diplomát az ELTE-n. A budapesti Athéné Idegenforgalmi, Informatikai és Üzletemberképző Középiskolában tanít fizikát és földrajzot.



1. ábra. w sebességvektorral hulló esőben x irányú vízszintes állandó v sebességvektorral mozgó, abh méretű téglatest, ami s távolságot tesz meg, amíg esőmentes helyre nem ér.

$v = (v, 0, 0)$ sebességvektorral az x tengely mentén, ahol s utat kell megtennie, amíg egy esőmentes helyre ér

$$t = \frac{s}{v} \quad (1)$$

idő alatt. Az eső hulljon w állandó sebességgel lefelé az x - z síkkal párhuzamosan, a függőlegestől mért θ szögben úgy, hogy ellenesőben $\theta > 0$, hátesőben $\theta < 0$, és $\theta = 0$, amikor pont függőlegesen zuhog (1. ábra). Ekkor az esőcseppek sebességvektora $w = (-w \cdot \sin\theta, 0, -w \cdot \cos\theta)$. A téglatesttel együttmozgó koordináta-rendszerben az esőcseppek sebességvektora:

$$\begin{aligned} w^* &= w - v = (-w \sin\theta - v, 0, -w \cos\theta) = \\ &= (w_x^*, w_y^*, w_z^*). \end{aligned} \quad (2)$$

Csak a felső felületre hulló háteső ($\theta < 0$)

Az eső a téglatestnek csak a felső felületét éri, ha a vele együttmozgó koordináta-rendszerben az eső w^* sebességvektorának nulla a vízszintes irányú összetevője, azaz (2) alapján: $w_x^* = -w \sin\theta - v = 0$, ahonnan

$$v = -w \sin\theta = v_{\text{krit}} > 0, \quad (3)$$

ami csak $\theta < 0$ esetén valósulhat meg, vagyis kizárólag hátesőben. Ekkor (1), (2) és (3) fölhasználásával, a felső felületet érő eső mennyisége

$$\begin{aligned} N_f(v = v_{\text{krit}}) &= |w_z^*| t a b \rho = \frac{w a b \rho s \cos\theta}{v_{\text{krit}}} = \\ &= -a b s \rho \cotan\theta > 0, \end{aligned}$$

mert $\theta < 0$, ahol ρ a homogénnek feltételezett esőcseppeloszlásban az egységnyi térfogatban lévő eső mennyisége (esőcseppek száma vagy azok össztömege/légtérfogata). Ilyenkor, érthető módon, a téglatestet érő eső mennyisége csak a felső ab felületnagyságtól függ és független a h magasságtól.

A felső és mellső felületre hulló függőleges vagy elleneső ($\theta \geq 0$)

Ha függőleges vagy ellenesőben ($\theta \geq 0$, 1. ábra) a téglatesttel együttmozgó koordináta-rendszerben az eső w^* sebességvektorának vízszintes irányú összetevője $w_x^* < 0$, akkor $v > -w \sin\theta = v_{\text{krit}}$, s ekkor a téglatest

$$n_e = (1, 0, 0) \quad (4)$$

normálvektorú mellső $A_m = hb$ felületét és a tetejének $n_f = (0, 0, 1)$ normálvektorú $A_f = ab$ felületét éri csak eső.

A 2. ábra alapján a téglatesttel együttmozgó koordináta-rendszerben egy n normálvektorú, A nagyságú felületnek az eső w^* sebességvektorára merőleges homlokfelülete

$$A_{\text{homlok}} = A \cos\alpha, \quad \text{ahol} \quad \cos\alpha = \frac{|n \cdot w^*|}{w^*}.$$

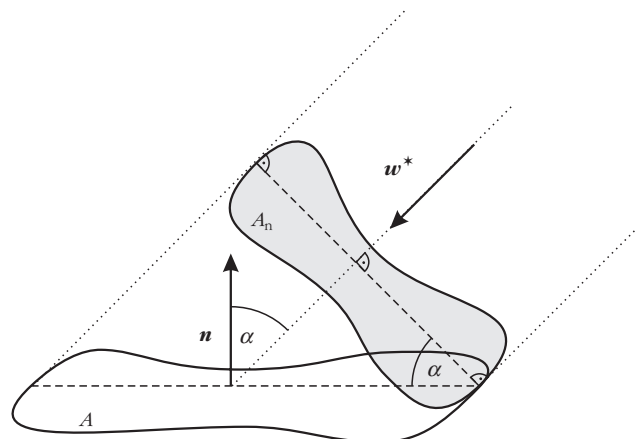
A téglatest mellső felülete esetén:

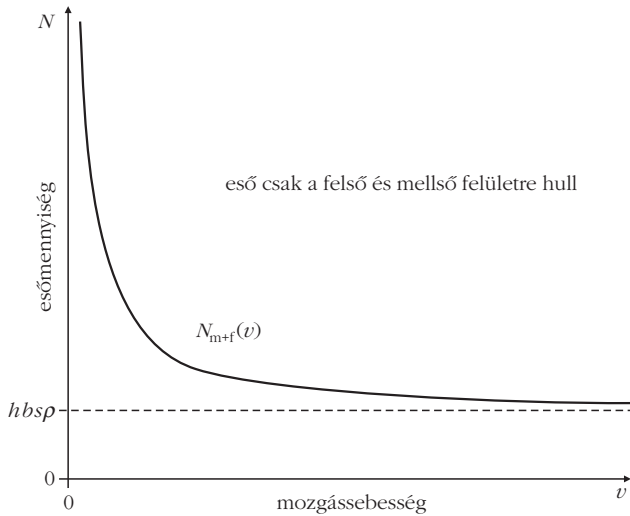
$$-n_m \cdot w^* = w^* \cos\alpha,$$

ahonnan

$$\cos\alpha = -\frac{n_m \cdot w^*}{w^*}. \quad (5)$$

2. ábra. A téglatesttel együttmozgó koordináta-rendszerben egy n normálvektorú, A felületnek az eső w^* sebességvektorára merőleges $A_n = A \cos\alpha$ homlokfelülete meghatározásához, ahol $\cos\alpha = |n \cdot w^*|/w^*$.





3. ábra. A függőleges vagy ellenesőben ($\theta \geq 0$) v sebességgel mozgó téglatestet s úton érő, (9) szerinti $N_{m+f}(v)$ esőmennyiség a v függvényében.

A (2) és (4) fölhasználásával:

$$\mathbf{n}_m \cdot \mathbf{w}^* = -(w \sin \theta + v). \quad (6)$$

Az (1), (5) és (6) fölhasználásával, a téglatest mellső felületét érő eső mennyisége:

$$\begin{aligned} N_m &= hb w^* \rho t \cos \alpha = hb w^* \rho s \frac{\cos \alpha}{v} = \\ &= hbs\rho \frac{v + w \sin \theta}{v}. \end{aligned} \quad (7)$$

Hasonlóan adódik a téglatest felső felületére hulló esőre, hogy

$$-\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{w}^* = w^* \cos \alpha,$$

ahonnan

$$\cos \alpha = -\frac{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{w}^*}{w^*},$$

valamint

$$\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{w}^* = -w \cos \theta,$$

így:

$$N_f = ab w^* \rho s \frac{\cos \alpha}{v} = abs\rho w \frac{\cos \theta}{v}. \quad (8)$$

Végül (7) és (8) fölhasználásával a téglatestet érő összes esőmennyiség:

$$\begin{aligned} N_{m+f}(v) &= N_m + N_f = \\ &= b s \rho \frac{hv + w(a \cos \theta + h \sin \theta)}{v}. \end{aligned} \quad (9)$$

A (9)-ből látható, hogy $N_{m+f}(v=0) = \infty$, $N_{m+f}(v=\infty) = hbs\rho$ és $N_{m+f}(v)$ deriváltja:

$$\frac{dN_{m+f}(v)}{dv} = -bs\rho w \frac{a \cos \theta + h \sin \theta}{v^2} < 0. \quad (10)$$

Függőleges vagy ellenesőben ($\theta \geq 0$) a 3. ábra mutatja a (9) szerinti $N_{m+f}(v)$ függvényt, aminek (10) szerinti deriváltja mindig negatív, azaz $N_{m+f}(v)$ monoton csökken végtelenről az $N_{m+f}(v=\infty) = hbs\rho$ értékig, amint a v sebesség 0-ról nő a végtelenig.

Konklúzió

Tehát függőleges vagy ellenesőben ($\theta \geq 0$) a téglatest minél nagyobb sebességgel teszi meg az s utat az esőmentes helyig, a felső és mellső együttes felülete annál kevésbé lesz vizes. Az összegyűjtött $N_{m+f}(v=\infty) = hbs\rho$ vízmennyiség alsó határértéke egyenesen arányos a hb mellső felülettel, a megteendő s távolsággal és az esőcseppek ρ térfogati sűrűségével.

A felső és hátsó felületre hulló háteső ($\theta < 0$)

Ha hátesőben ($\theta < 0$) a téglatesttel együttmozgó koordináta-rendszerben az eső \mathbf{w}^* sebességvektorának vízszintes irányú összetevője $w_x^* = -w \sin \theta - v > 0$, akkor $v < -w \sin \theta = v_{\text{krit}}$, és ekkor a téglatest felső felületét, valamint

$$\mathbf{n}_h = (-1, 0, 0) \quad (11)$$

normálvektorú hátsó $A_h = hb$ felületét éri csak eső. A téglatest hátsó felülete esetén:

$$-\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{w}^* = w^* \cos \alpha,$$

ahonnan

$$\cos \alpha = -\frac{\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{w}^*}{w^*}. \quad (12)$$

A (2) és (11) fölhasználásával:

$$\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{w}^* = w \sin \theta + v. \quad (13)$$

Az (1), (12) és (13) fölhasználásával, a téglatest hátsó felületét érő eső mennyisége:

$$N_h = hb w^* \rho t \cos \alpha = -hbs\rho \frac{v + w \sin \theta}{v}. \quad (14)$$

(8) és (14) fölhasználásával a téglatestet érő összes esőmennyiség:

$$\begin{aligned} N_{h+f}(v) &= N_h + N_f = \\ &= bs\rho \frac{w(a \cos \theta - h \sin \theta) - hv}{v}. \end{aligned} \quad (15)$$

(15)-ből $N_{h+f}(v=0) = \infty$, $N_{h+f}(v=v_{\text{krit}}=-w \sin \theta) = N_{\text{krit}} = -abs\rho \cotan \theta > 0$, mert $\theta < 0$, és $N_{h+f}(v)$ deriváltja:

$$\frac{dN_{h+f}(v)}{dv} = -bs\rho w \frac{a \cos \theta - h \sin \theta}{v^2} < 0. \quad (16)$$

Hátesőben ($\theta < 0$) a 4. ábra mutatja a (15) szerinti $N_{h+f}(v)$ függvényt, aminek (16) szerinti deriváltja negatív, azaz $N_{h+f}(v)$ monoton csökken végtelenről az $N_{h+f}(v_{krit}) = -w \sin \theta = N_{krit} = -absp \cot \theta$ értékig, amint a v sebesség 0-ról nő v_{krit} -ig. A 4. ábra a (9) szerinti $N_{m+f}(v)$ függvényt is mutatja, ami monoton csökken $N_{krit} = -absp \cot \theta$ -ról $hbsp$ -ig, amint a v sebesség v_{krit} -ről a végtelenig nő.

Konklúzió

Tehát hátesőben ($\theta < 0$) téglatestünket az elázás mértékének optimalizálása érdekében a következő stratégiákkal mozgathatjuk:

1. Ha hátesőben azt akarjuk, hogy a téglatestnek csak a felső felületét érje eső, akkor $v_{krit} = w \sin |\theta|$ sebességgel kell mozognia. Ez az eset csak hátesőben fordulhat elő.

2. Ha azt akarjuk, hogy a téglatest hátsó felszínét ne érje eső, a felső és mellső felülete pedig minél kevésbé ázzon el, akkor minél nagyobb $v (> v_{krit})$ sebességgel kell mozognia. A hátsó felületére csak akkor nem hull eső, ha $v > v_{krit}$.

3. Ha azt akarjuk, hogy a téglatest mellső felületét ne érje eső, de hátsó felszíne megázhat, akkor $v < v_{krit}$ sebességgel kell mozognia. Ha ilyenkor arra is törekszünk, hogy a felső és hátsó felület minél kevésbé ázzon el, akkor minél gyorsabban kell mozognia és lehetőleg közelítse meg a v_{krit} kritikus sebességet, amit ha elér, akkor csak a felső felülete ázik az 1. pont szerint.

Az esőben haladás optimális sebességéről szóló két videofilm ellentétes következtetéseinek oka

Egy magyar rövid videofilm [2] azt tisztázta egy elemi geometriai számítással, hogy függőlegesen hulló esőben futni vagy sétálni érdemes-e, ha minél kevésbé akarunk elázni. Itt is téglatestnek tekintették az esőben mozgó embert, és csak azon speciális esettel foglalkoztak, amikor függőlegesen ($\theta = 0$) esik az eső. Arra jutottak, hogy mellünk benedvesedése független a mozgás v sebességétől, míg a fejünk s vállunk annál kevésbé lesz vizes, minél nagyobb a v . E következtetések egyeznek a fönti általánosabb számításaink függőlegesen hulló ($\theta = 0$) esőre vonatkozó eredményeivel: (7) és (8) szerint $\theta = 0$ esetén a téglatest mellső felületét érő

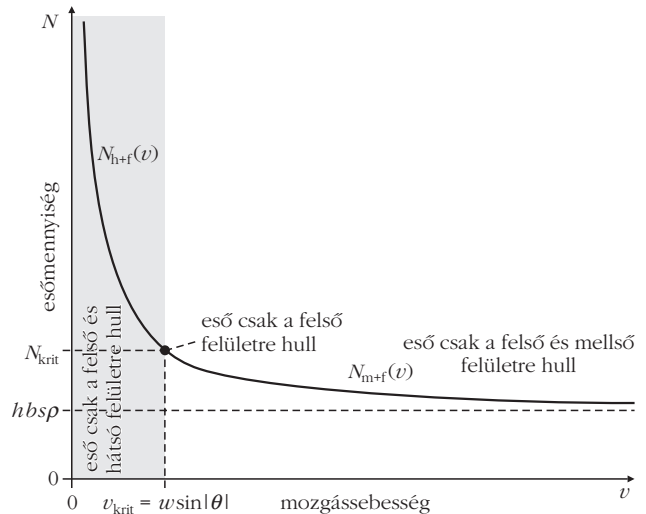
$$N_m(\theta=0) = hbsp \quad (17)$$

esőmennyiség független v -től, a felső felületet érő

$$N_f(\theta=0) = \frac{abspw}{v} \quad (18)$$

esőmennyiség pedig annál kisebb, minél nagyobb a v .

E következtetés azonban ellentétes az amerikai *MythBusters* (magyarul: mítoszrombolók) televíziós



4. ábra. A hátesőben ($\theta < 0$) v sebességgel mozgó téglatestet s úton érő, (9) szerinti $N_{m+f}(v)$ és (15) szerinti $N_{h+f}(v)$ esőmennyiség a v függvényében.

filmsorozat (magyar címe: *Állítólag Running in the Rain (Futás az esőben)*) epizódjának [3] kísérleti eredményével. Ezen epizódban az esőben haladás optimális sebességét vizsgálták kísérletileg: egy csarnok mennyezetéről egyenes mentén állandó távközökkel elosztott több zuhanyrózsából gyakorlatilag függőlegesen ($\theta = 0$) hullott a mesterséges eső, ami alatt egy adott távolságot változó sebességgel (gyalogolva vagy futva) tett meg két ember, akik egy gumi kezeslábas fölé húzott kezeslábas szövetruhát viseltek. A gumialosónak és a fölötte hordott szövetruhának az volt a szerepe, hogy az emberekre hulló víz ne tapadjon a bőrhöz, hanem a szövetruha minél többet szívjon magába. Az esőben mozgó emberek fejére hulló esőt figyelmen kívül hagyták, de a ruha fölfogta a vállat érő esőt is. A fejet nem borította a szövetruha, mert nem volt kapucniája, és máshogyan sem próbálták meg mérni a fejet érő esővíz mennyiségét. A mesterséges esőben egy adott táv adott sebességgel való megtétele előtt és után digitális mérleggel mérték meg a kezdetben száraz, majd nedves szövetruha súlyát, amely súlyok különbsége a szövet által fölszívott víz súlyát adta meg.

Arra az eredményre jutottak, hogy amikor gyalogoltak az esőben, akkor a szövetruha kevésbé lett vizes, mint amikor futottak. Ezzel azt a mítoszt vélték lerombolni, hogy esőben futni érdemes, ha kevésbé akarunk elázni. E kísérletből tehát azt a végkövetkeztetést vonták le, hogy függőlegesen hulló esőben ne fussunk, hanem gyalogoljunk, ha adott távon kevésbé akarunk vizesek lenni.

Míndez szöges ellentétben áll az [1] cikk, a [2] videofilm és a fönti számításaink (17) és (18) eredményeivel. A kísérletben a függőlegesen hulló esőben mozgó emberek fejére jutó esővel nem foglalkoztak, de a vállakra hulló eső súlyát belemérték a vászonruhába. Márpedig (17) jóslata alapján a mellét érő esővíz $N_m(\theta=0) = hbsp$ mennyisége nem függ a v -től, míg (18) szerint a vállakra hulló eső $N_f(\theta=0) =$

Egy téglatestet érő összes esőmennyiség a felső és mellső felületre hulló függőleges ($\theta = 0$) vagy elleneső ($\theta > 0$), valamint a felső és hátsó felületre hulló háteső ($\theta < 0$) esetén, $\theta = +90^\circ, +45^\circ, 0^\circ, -45^\circ, -90^\circ$ mellett, (9) és (15) felhasználásával.

a téglatest felső és mellső együttes felületére hulló függőleges ($\theta = 0$) vagy elleneső ($\theta > 0$)

$$(9): N_{m+f}(\theta) = b s \rho \frac{h v + w(a \cos \theta + h \sin \theta)}{v}$$

a téglatestet érő összes esőmennyiség

feltétel

$$N_{m+f}(\theta = +90^\circ) = h b s \rho \frac{v + w}{v}$$

–

$$N_{m+f}(\theta = +45^\circ) = b s \rho \frac{2 h v + \sqrt{2} w(a + h)}{2 v}$$

–

$$N_{m+f}(\theta = 0^\circ) = b s \rho \frac{h v + a w}{v}$$

–

a téglatest felső és hátsó együttes felületére hulló háteső ($\theta < 0$)

$$(15): N_{h+f}(\theta) = b s \rho \frac{w(a \cos \theta - h \sin \theta) - h v}{v}$$

a téglatestet érő összes esőmennyiség

feltétel

$$N_{h+f}(\theta = -45^\circ) = b s \rho \frac{\sqrt{2}(a + h)w - 2 h v}{2 v}$$

$$\sqrt{2}(a + h)w \geq 2 h v$$

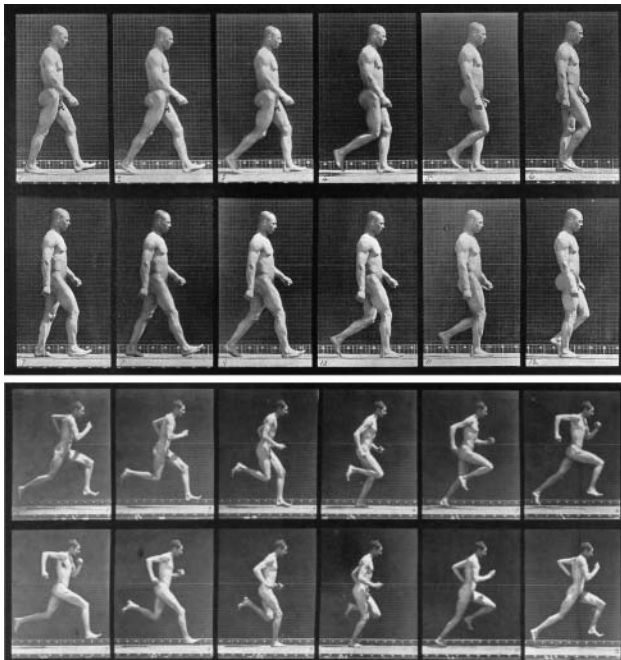
$$N_{h+f}(\theta = -90^\circ) = h b s \rho \frac{w - v}{v}$$

$$w \geq v$$

$abspw/v$ mennyisége fordítva arányos a v -vel, s nem egyenesen arányos vele, mint a kísérletben találták. Mi ennek az oka? Kinek van igaza?

Ezen ellentmondás oka, hogy a fönti számítások egy mozgás közben folyamatosan ide-oda lendülő

5. ábra. Eadweard Muybridge (1830–1904) híres fényképsorozata egy gyalogoló (fölül) és egy futó (alul) ember 12 mozdulatáról.



kéz és láb nélküli, esőben haladó merev téglatestre vonatkoznak, míg a mérésben a kezeiket és lábaikat lendítgető emberi testek gyalogoltak vagy futottak. Az 5. ábra Eadweard Muybridge (1830–1904) amerikai fotográfus gyalogló és futó emberek mozdulatainak híres képsorozatait mutatja. Jól látszik, hogy gyalogláskor a kezek és lábak jóval kisebb szögkitérésűek, mint futáskor, miáltal a függőleges eső kevésbé éri őket, mint futás közben. Ez a magyarázata annak, hogy a kísérletben függőlegesen hulló esőben gyalogló emberek szövetruhája kevésbé lett vízvesztés, mint a futóké. Ha a kísérletet v_1 kisebb és v_2 nagyobb sebességgel mozgó téglatestekkel végezték volna, akkor a fönti elméleti számításoknak megfelelően pont az ellenkező eredményre jutottak volna, mert ekkor a nagyobb v_2 sebességű téglatest vízszintes teteje lett volna kevésbé

vízvesztés, mint a kisebb v_1 sebességűé: mivel $v_1 < v_2$, ezért $N_{f1}(\theta=0, v_1) = abspw/v_1 > N_{f2}(\theta=0, v_2) = abspw/v_2$. Ugyanakkor mindkét téglatest mellső felületére egyformán nedvesedett volna be: $N_{m1}(\theta=0, v_1) = N_{m2}(\theta=0, v_2) = h b s \rho$, mert N_m független v -től.

Következtetések

1. Ha függőlegesen hulló esőben eltekintünk a fejünket érő esővíztől – mert például azt fejedővel védhetjük az esőcseppek ellen –, akkor az a kísérleti eredmény a helyes, hogy függőlegesen esőben inkább gyalogolni, mint futni érdemes, mert e kísérlet sokkal valóságosabban modellezte az esőben haladó dinamikus emberi testet, mint a számításokban vizsgált merev téglatest.

2. Ha a függőlegesen hulló esőben haladó embernek csak a gyakorlatilag állandó irányú, közel vízszintes és függőleges felületrészekkel bíró fejét, vállát, mellét és hátát vesszük figyelembe és eltekintünk a folyamatosan mozgó s ezért állandóan változó irányú felületrészekkel rendelkező kezeitől és lábaitól – mert például a végtagok viszonylag kisebb felületűek –, akkor azon elméleti jóslat a helyes, hogy függőlegesen hulló esőben inkább futni, mint gyalogolni érdemes. Mivel a kezeinket és lábainkat borító ruharészek elázása is általában kellemetlen, ezért az e következtetés alapjául szolgáló szituáció kevésbé életszerű, mint az előző, általánosabb érvényű helyzet.

3. Az 1. táblázat foglalja össze egy téglatestet érő összes esőmennyiséget a felső és mellső felületre hulló függőleges vagy elleneső ($\theta \geq 0$), valamint a felső és hátsó felületre hulló háteső ($\theta < 0$) esetén, $\theta = +90^\circ, +45^\circ, 0^\circ, -45^\circ, -90^\circ$ mellett, (9) és (15) felhasználásával.

Irodalom

1. J. J. Holden, S. E. Belcher, Á. Horváth, I. Pytharoulis: Raindrops keep falling on my head. *Weather* 50/11 (1995) 367–370.
2. Esőben futni vagy sétálni jobb? <https://www.youtube.com/watch?v=4GfQBvDB73A>
3. MythBusters: Running in the Rain. <https://www.youtube.com/watch?v=HtbJbi6Sswg>