

fizikai szemle

*Hajítások
Súlylökés és
kalapácsvetés*

Még egy dimenzió
Mikola-verseny 2024
Lord Kelvin 200

2024/10

nka

A SÚLYLÖKÉS ÉS A KALAPÁCSVETÉS VILÁGCSÚCS-RANGSORAINAK VÁLTOZÁSA, HA FIGYELEMBE VENNÉK A FÖLD FORGÁSÁT ÉS AZ ATLÉTÁK MAGASSÁGÁT

Horváth Gábor[@], Hegedűs Dénes Zsolt, Slíz-Balogh Judit
ELTE Biológiai Fizika Tanszék, Budapest
[@]E-mail: gh@arago.elte.hu

A súlylökés és a kalapácsvetés dobótávjainak egymást követő világcúcsai közti különbség tendenciózusan csökken, mivel a sportolók teljesítőképessége közelít egy felső határhoz. Emiatt napjainkban már érdemes lenne figyelembe venni olyan környezeti tényezők dobótávra kifejtett hatásait, mint a szélesebbesség, a tengerszint fölötti magasság, a légnyomás, a lég hőmérséklet, a dobópálya ferdesége és földrajzi szélessége, valamint a dobás égtáj szerinti azimutiránya. Az utóbbi kettő a Föld forgásából eredő centrifugális és Coriolis-gyorsuláson keresztül fejti ki hatását a dobótávra. Cikkünk célja annak számítógépes modellezéssel való kiderítése, hogy ha a centrifugális és Coriolis-gyorsulást, valamint a sportolók testmagasságát is figyelembe vették volna a kültéri női és férfi súlylökés és kalapácsvetés világcúcsainak hitelesítésekor, akkor miként változtak volna a világcúcsrangorszámok [Hegedűs 2022, Horváth és társai 2023]. Számítógépes modellezéssel rekonstruáljuk a súlygolyók és kalapácsok világcúcsokkori kezdősebességeit, majd meghatározzuk, hogy a súlylökés és kalapácsvetés világcúcsrangorszámjai miként változnának, ha figyelembe vennék a centrifugális és Coriolis-gyorsulás, valamint a testmagasság dobótávra kifejtett hatásait.

1. A Föld gyorsuló koordináta-rendszere és a dobósportok

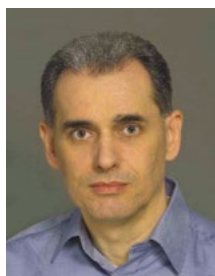
A négy olimpiai dobósportág – súlylökés, kalapácsvetés, diszkoszvetés, gerelyhajítás [White 2011] – közül cikkünkben csak a súlylökés és a kalapácsvetés fizikájával foglalkozunk. Egy $\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ lineárisan gyorsuló és a t időben változó $\boldsymbol{\omega}(t)$ szögsebességvektorú forgást végző rendszerben – mint például a Föld – eldobott m tömegű

súlygolyó vagy kalapács Newton II. törvénye szerinti mozgásegyenletében az \mathbf{F} valódi külső eredő erő által okozott \mathbf{F}/m gyorsuláson túl még a következő négy lát-szólagos tehetetlenségi gyorsulás lép fel [Landau és Lif-sic 1984]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m - \mathbf{a}_{\text{lineáris}} + \mathbf{a}_{\text{Euler}} + \mathbf{a}_{\text{Coriolis}} + \mathbf{a}_{\text{centrifugális}},$$
$$\mathbf{a}_{\text{Euler}} = \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad \mathbf{a}_{\text{Coriolis}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$
$$\mathbf{a}_{\text{centrifugális}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}),$$

ahol $-\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ az $\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ lineáris gyorsulással ellentétes irányú tehetetlenségi gyorsulás, $\mathbf{a}_{\text{Euler}} = (\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})$ az $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ szög-gyorsulásvektor keltette Euler-gyorsulás, $\mathbf{a}_{\text{Coriolis}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{a}_{\text{centrifugális}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$ pedig az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor keltette Coriolis- és centrifugális gyorsulás.

Mizera és Horváth [2000, 2002], Horváth [2001, 2009], valamint Jánosi és Bántay [2002] vizsgálták a centrifugális és Coriolis-gyorsulásnak a súlylökés és a kalapácsvetés dobótávjait csökkentő vagy növelő hatásait a forgó és keringő Földön, a Föld lineáris gyorsulását (azaz a földfelszíni árapályt) és Euler-gyorsulását elhanyagolva a gravitációs, centrifugális és Coriolis-gyorsuláshoz, valamint a légellenállás miatti lassuláshoz képest. Pálfi [2021], valamint Pálfi és társai [2022] a csillagászati és geofizikai szakirodalom [Brosche és Sünder-



Horváth Gábor az ELTE-n végzett fizikus, az MTA doktora, az ELTE Biológiai Fizika Tanszék egyetemi tanára, az ELTE Környezetoptika Laboratórium és a HUN-REN-ELTE Asztropolarimetria Kutatócsoport vezetője. A vizuális környezet optikai sajátágaival, az állatok polarizációérzékelésével foglalkozik, valamint fotobiofizikai, biomechanikai, égi mechanikai és asztropolarimetria kutatásokat végez. Polarimetria expedíciókon vett részt az Északi-sarkon, a finn Lappföldön, az Atlanti-óceánon, valamint a tunéziai és namíbiai sivatagokban. Számos szakmai díj és kitüntetés tulajdonosa. Több angol és magyar (szak-, tan-) könyv, valamint számos tudományos szerzős cikk szerzője, rendszeresen tart ismeretterjesztő előadásokat, főleg iskolákban.



Hegedűs Dénes Zsolt az ELTE-n szerzett fizikus-diplomát. „A kültéri felnőtt férfi és női súlylökés és kalapácsvetés világcúcsrangsorainak változásai a Föld forgása miatti centrifugális gyorsulás és a testmagasság dobótávra kifejtett hatásainak figyelembevételével” című szakdolgozatát Horváth Gábor témavezetésével írta. Jelenleg Budapesten dolgozik, ahol a Ceva-Phylaxia Vakcinagyártó Zrt. Minőség-ellenőrzési Osztályán állatkísérletek lebonyolításával és kiértékelésével foglalkozik.



Slíz-Balogh Judit a BME-n végzett matematikus-mérnökként, majd menedzserként dolgozott a Graphisoft SE szoftverfejlesztő cégnél. Azután az ELTE-n szerzett csillagászdiplomát, majd ott doktorált a Fizika Doktori Iskola Résegszecskefizika és csillagászat programjában. Fő kutatási területe az égi mechanika, azon belül a Naprendszer Lagrange-pontjainak kaotikus dinamikája és képkalkoló polarimetriája. Jelenleg a HUN-REN-ELTE Asztropolarimetria Kutatócsoport tagja.

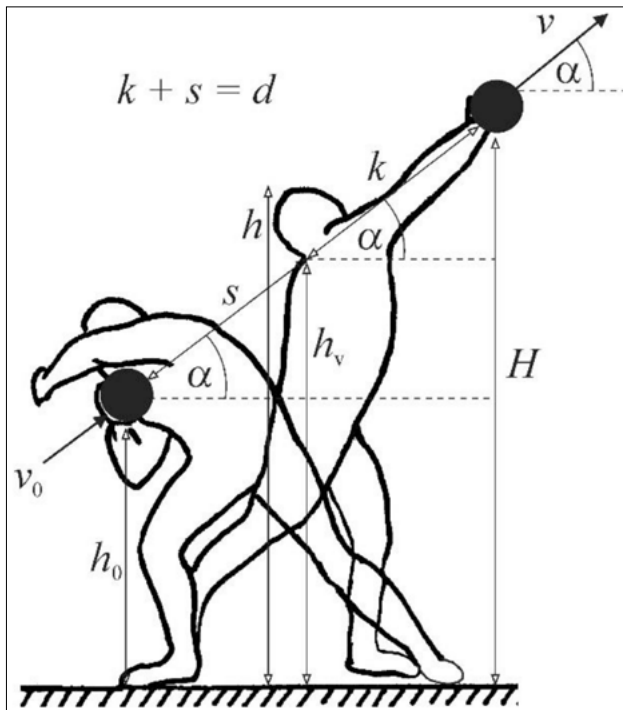
mann 1978, Scrutton 1978, Marik 1989, Horváth 1991, Völgyesi 2013, Varga 2014] áttekintésével a Föld (1)-beli négy tehetetlenségi gyorsulását számszerűen becsülték meg és állították nagyságrendi sorrendbe azért, hogy kiderüljön, melyiküknek érdemes figyelembe venni a forgó és keringő Föld felszínén lezajló dobósportversenyek dobótávjaira gyakorolt hatását, és melyiküké hanyagolható el. Arra jutottak, hogy a Galaxis, a Nap és a Hold keltette árapály, valamint a Föld szögsebességvektorának időbeli változása (általános precesszió, luniszoláris precesszió, planetáris precessziókori nutáció, forgásllassulás) miatti gyorsulások a $g \approx 9,832 \text{ m/s}^2$ fölfelszíni Newton-féle gravitációs gyorsulásnak nagyságrendileg csak a 10^{-6} – 10^{-25} -nyi hányadát teszik ki, miáltal elhanyagolhatók. Ugyanakkor a centrifugális és a Coriolis-gyorsulás nagyságrendben 10^{-3} és 10^{-4} -szerese g -nek; ezeket már érdemes figyelembe venni a dobósportok dobótávjainak hitelesítésében. A kalapácsvetés és a súlylökés dobótávjait a centrifugális gyorsulás deciméteres, illetve centiméteres nagyságrendben képes változtatni, míg a Coriolis-gyorsulás centiméteres, illetve milliméteres nagyságrendben [Mizera és Horváth 2000, 2002, Horváth 2004, 2009, Jánosi és Bántay 2002].

Habár az ellökött, elvetett súly és kalapács H kezdőmagassága triviálisan befolyásolja az L dobótávot (L nő vagy csökken H növekedésével vagy csökkenésével adott kezdőszög és kezdősebesség mellett), a jelen vizsgálatunk elsőként bizonyítja, hogy a súlylökés és a kalapácsvetés jónéhány világcsúcsának rangsorszáma megváltozna, ha az atléták magasságának, valamint a centrifugális és Coriolis-gyorsulásoknak a hatásait figyelembe vennék. Azt is kiderítjük, hogy e három tényező közül mikor melyik a leginkább felelős egy adott változásért.

2. A súlylökés és a kalapácsvetés kezdőmagasságai és kezdőszögei

A felnőtt női és férfi súlylökés és kalapácsvetés 20–20 legjobb kültéri világcsúcsát elérő atléták h testmagasságát nyilvános internetforrásokból gyűjtöttük össze. Egyedül Terence Hillary Albritton észak-amerikai súlylökő magassága nem volt így módon elérhető. Az ő $h = 1,94 \text{ m}$ magasságát egy vele készült interjúból [Jordan 1977] derítettük ki.

Az 1. ábra szerint a súlylökés H kezdőmagassága a következőképpen számolható: $H_{\text{súlylökés}} = h_v + k \cdot \sin \alpha$, ahol h_v a sportoló vállmagassága, k a karhossza, α pedig a súlygolyó kezdőszöge. h_v és k egyéni értékei azonban sajnos nem ismertek, ellentétben a súlylökők h testmagasságával. Ha elfogadjuk azt a logikus föltételezést, hogy az emberek testrészeinek hossza (esetünkben h_v és k) egyenesen arányos a h magasságukkal, akkor a súlylökők h egyéni magasságának és h^* átlagmagasságának ismeretében h_v és k így becsülhető: $h_v = h_v^* h/h^*$, $k = k^* h/h^*$, ahol h_v^* és k^* az átlagos vállmagasság és átlagos karhossz. Így módon a súlylökés kezdőmagassága:



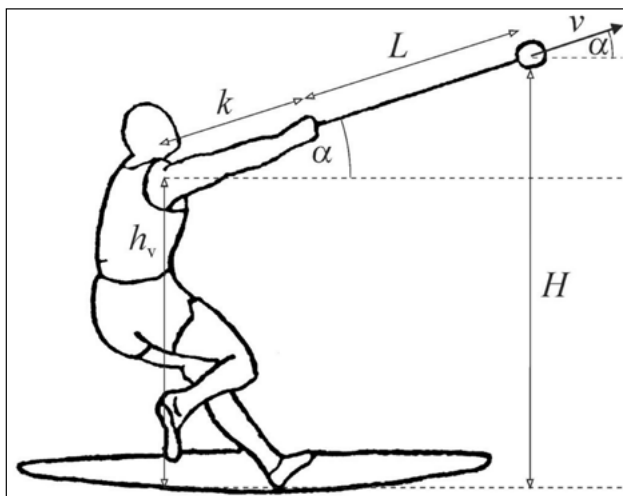
1. ábra. A súlylökés $H_{\text{súlylökés}}$ kezdőmagasságának és a súlylökő W munkájának számításához. A súlylökő a súlygolyó végső gyorsításakor jó közelítéssel egy $d = k + s$ hosszúságú egyenes szakaszon végez W munkát a gravitáció ellenében, a golyó mozgási energiájának növelése céljából

$$H_{\text{súlylökés}} = h_v + k \cdot \sin \alpha = h_v^* h/h^* + (k^* h/h^*) \sin \alpha = (h_v^* + k^* \sin \alpha) h/h^*$$

A 2. ábra szerint hasonlóan adódik a kalapácsvetés kezdőmagasságára:

$$H_{\text{kalapácsvetés}} = h_v + (k + L) \sin \alpha = h_v^* h/h^* + (k^* h/h^* + L) \sin \alpha,$$

ahol L a kalapács drótjának és fogantyújának összhossza. A gond csak az, hogy gyakorlatilag kideríthetetlenek a súlylökők és kalapácsvetők vállmagasságának és kar-



2. ábra. A kalapácsvetés $H_{\text{kalapácsvetés}}$ kezdőmagasságának számításához

hosszának h_v^* és k^* átlagai. Ily módon az egyéni H kezdőmagasságokat más módon kell becsülnünk.

Megede és Hymans [1991] szerint a férfi súlylökés és kalapácsvetés esetén a lökések, vetések a következő átlagos kezdőmagasságokból történnek:

$$H_{\text{férfi súlylökés}}^* = 2,250 \text{ m}, \quad H_{\text{férfi kalapácsvetés}}^* = 1,800 \text{ m}. \quad (2)$$

A súlylökő és kalapácsvető nőknél a súlygolyó és a kalapács $H_{\text{női súlylökés}}^*$ és $H_{\text{női kalapácsvetés}}^*$ átlagos kezdőmagasságaira csak ritkán és kis létszámon végzett mérések történtek [Linthorne 2001, Konz és Hunter 2015]. Ezért a férfi és nő súlylökők és kalapácsvetők $h_{\text{férfi súlylökés}}^*$, $h_{\text{férfi kalapácsvetés}}^*$, $h_{\text{női súlylökés}}^*$, $h_{\text{női kalapácsvetés}}^*$ átlagos testmagasságainak ismeretében a nők sportszerének átlagos $H_{\text{női súlylökés}}^*$ és $H_{\text{női kalapácsvetés}}^*$ kezdőmagasságát úgy becsüljük, hogy a férfiakra jellemző $H_{\text{férfi}}^*$ kezdőmagasságból kivonjuk a férfiak $h_{\text{férfi}}^*$ átlagos testmagasságának és a nők $h_{\text{női}}^*$ átlagos testmagasságának a különbségét:

$$H_{\text{női}}^* = H_{\text{férfi}}^* - (h_{\text{férfi}}^* - h_{\text{női}}^*) = H_{\text{férfi}}^* - h_{\text{férfi}}^* + h_{\text{női}}^*. \quad (3)$$

Az ellökött, elvetett súlygolyó és kalapács H kezdőmagassága nyilván egyenes arányban áll a sportoló h testmagasságával úgy, hogy h növekedésével $H(h)$ is monoton nő. H egyéni értékei ismeretlenek, valamint csak a (2) és (3) szerinti sportág- és nemfüggő H^* átlagmagasság ismert (becsült), ezért az egyéni H_i magasság úgy becsülhető, hogy H_i annival nagyobb vagy kisebb H^* -nál, amennyivel az egyéni h_i testmagasság nagyobb vagy kisebb a sportolók sportág- és nemfüggő testmagasságának h^* átlagánál¹:

$$H_i(h_i) = H^* + h_i - h^*. \quad (4)$$

(3) és (4) felhasználásával kapjuk a sportszer sportág- és nemfüggő kezdőmagasságát:

$$\begin{aligned} H_{i,\text{férfi}}(h_{i,\text{férfi}}) &= H_{\text{férfi}}^* + h_{i,\text{férfi}} - h_{\text{férfi}}^*, \\ H_{i,\text{női}}(h_{i,\text{női}}) &= (H_{\text{férfi}}^* - h_{\text{férfi}}^* + h_{\text{női}}^*) \\ &+ h_{i,\text{női}} - h_{\text{női}}^* = H_{\text{férfi}}^* + h_{i,\text{női}} - h_{\text{férfi}}^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Az 1–4. táblázat alapján és (3) használatával a férfi és női súlylökés 20 legnagyobb világcsúcsára vonatkozó átlagos adatok a következők:

$$\begin{aligned} H_{\text{férfi súlylökés}}^* &= 2,250 \text{ m}, & H_{\text{férfi kalapácsvetés}}^* &= 1,800 \text{ m}, \\ h_{\text{férfi súlylökés}}^* &= 1,941 \text{ m}, & h_{\text{női súlylökés}}^* &= 1,782 \text{ m}, \\ h_{\text{férfi kalapácsvetés}}^* &= 1,872 \text{ m}, & h_{\text{női kalapácsvetés}}^* &= 1,758 \text{ m}, \\ H_{\text{női súlylökés}}^* &= 2,091 \text{ m}, & H_{\text{női kalapácsvetés}}^* &= 1,686 \text{ m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Vegyük észre, hogy mivel a sportolók k egyéni és k^* átlagos karhossza egyaránt ismeretlen, a H kezdőmagasság (3), (4) és (5) szerinti becslésekor kénytelenek voltunk azon föltételezéssel élni, hogy k egy, a h test-

magasságtól független konstans. Ezzel azonban csak elhanyagolható hibát követünk el, mert a k csekély (néhány cm-es) egyéni különbségei sokkal kisebb mértékben – súlylökéskor $ksina$ járulékkal, kalapácsvetéskor pedig $(k + L)sina$ többlettel – járulnak hozzá a $H_{\text{súlylökés}}^* = h_v + ksina$ és $H_{\text{kalapácsvetés}}^* = h_v + (k + L)sina$ kezdőmagassághoz, mint a jóval nagyobb h_v vállmagasság (1. és 2. ábra), ráadásul a konstans karhosszúság és az egyéni kezdőmagasság testmagasság-különbséggel való korrekciója között is részbeni hibakioltás áll fenn.

A súlylökés és a kalapácsvetés leghosszabb dobótávjait a vízszintestől mért következő ideális kezdőszögek biztosítják [Megede és Hymans 1991, Linthorne 2001, Horváth 2009]:

$$\alpha_{\text{súlygolyó}} = 37^\circ, \quad \alpha_{\text{kalapács}} = 44^\circ. \quad (7)$$

Habár az atléták mindig próbálják tartani ezen ideális α értékeket, dobáskor gyakran kisebb-nagyobb mértékben eltérnek tőlük. Mivel az általunk vizsgált 80 világcsúcs tényleges α értékei ismeretlenek, és lehetetlen rekonstruálni őket, a modellünkben szükségszerűen állandónak és ideálisnak vettük azokat.

3. A földfelszíni nehézségi gyorsulás Cassini-formulája

A forgó Föld a centrifugális erő miatt a gömbtől kissé eltérő, leginkább forgási ellipszoidra hasonlító, geoid alakot vesz fel. A Föld átlagos felszíne úgy görbül, hogy minden pontjában merőleges a nehézségi gyorsulásra, ami két komponensből áll: a gravitációs és a centrifugális gyorsulásból. Mivel a centrifugális gyorsulás a Föld tengelyétől mért távolsággal egyenes arányban nő, nagysága a földrajzi szélességgel változik. Változik a gravitációs gyorsulás értéke is, hiszen a Föld lapultsága miatt a földfelszín tömegközépponttól mért távolsága a földrajzi szélesség függvénye. A nehézségi gyorsulás φ földrajzi szélességtől való függését a nemzetközi gravitációs formula írja le nagy pontossággal [Hinze és társai 2013]:

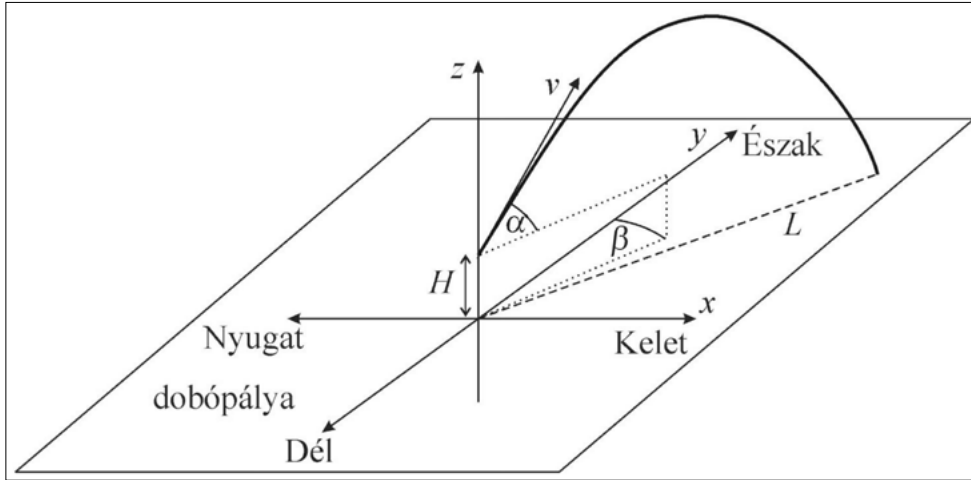
$$\begin{aligned} g(\varphi) &= 9,780327 \cdot [1 + 0,0053024 \cdot \sin^2\varphi \\ &- 0,0000058 \cdot \sin^2(2\varphi)] \text{ m/s}^2, \end{aligned} \quad (8)$$

ami magában foglalja a forgás miatti centrifugális gyorsulást is.

4. A súlygolyó és a kalapács mozgásának számítógépes modellezése

Modellünkben a következő változókat tekintettük állandónak, mert a világcsúcsokkor konkrét értékeik ismeretlenek és utólag kideríthetetlenek: T léghőmérséklet, p légnyomás, ρ légsűrűség, α kezdőszög, szélsősebesség és dobópályaferdeség. A dobás tengerszint fölötti s magassága szintén befolyásolja az $L\{\rho[T(s), p(s)]\}$ dobótávot a $T(s)$ hőmérséklettől és $p(s)$ nyomástól függő $\rho[T(s), p(s)]$

¹ A kezdőmagasság majdnem 90%-át a testmagasság adja ki, és ez – férfiakat-nőket egyben tekintve – egy nagyjából 25 cm-es tartományban változik, ezért a kezdőmagasság testmagasság-különbséggel való egyszerűsített egyéni korrigálása a számításainkban elhanyagolható hibát jelent.



3. ábra. A számítógépes modellezésben használt koordináta-rendszer

légsűrűség által meghatározott légellenálláson keresztül. Mivel T , p és ρ dobásokról értékei ismeretlenek, azok állandó, normál értékeit ($T = 293 \text{ K}$, $p = 101\,325 \text{ Pa}$, $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$) vettük alapul. Habár súlylökéskor a forgó és csúszó technikák kissé eltérő hatással lehetnek az L dobótávra, vizsgálatunkban ezt figyelmen kívül hagytuk, mivel utólag többnyire már kideríthetetlen, hogy melyik technikát alkalmazták a súlylökők egy adott világcsúcsuk elérésekor.

Tekintsük a 3. ábra szerint a földfelszínhez rögzített koordináta-rendszert, amiben az x tengely a földrajzi keletre, az y tengely a földrajzi északra mutat, a z tengely pedig függőlegesen fölfelé! A sportoló H magasságból dobja el a sportszert, északról az óramutató járásával egyezően mért β azimutszögben és a vízszinteshez képest α kezdőszög alatt. E koordináta-rendszerben a

$$\mathbf{v} = (v \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, v \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, v \cdot \sin \alpha) \quad (9)$$

kezdősebességvektorral eldobott súlygolyó vagy kalapács általános mozgásegyenlete:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \cdot \mathbf{g}(\varphi) + 2m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{kQ\rho(p,T)}{2} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{szél}} \right)^2 \cdot \mathbf{n}, \quad (10)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{szél}}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{szél}} \right|},$$

ahol az egyes tagok jelentése a következő:

m : A sportszer tömege. A férfiak súlygolyója és kalapácsa $m_{\text{férfi}} = 7,26 \text{ kg}$ tömegű, míg a nőké $m_{\text{női}} = 4,00 \text{ kg}$, továbbá a sűrűségétől függően a férfi súlygolyó $5,5\text{--}6,5 \text{ cm}$ átmérőjű, míg a női $4,75\text{--}5,5 \text{ cm}$ [Linthorne 2001, Konz és Hunter 2015]. A kalapács a súlygolyóval egyező fémgolyó, amihez fogantyúban végződő acélkötél van rögzítve.

φ : Az Egyenlítőtől mért földrajzi szélesség szöge.

β : A dobás égtáj szerinti azimutiránya az óramutató járásával azonos irányban mérve (például $\beta = 0^\circ$: észak, $\beta = +90^\circ$: kelet, $\beta = +180^\circ$: dél).

p : légnyomás

T : léghőmérséklet

$\boldsymbol{\omega}$: A Föld szögsebességvektora, aminek nagysága $\omega = 2\pi/86\,400 \text{ s}^{-1} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, iránya a Föld forgástengelyével párhuzamos és az

Északi-sark felé mutat, komponensei pedig:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega \cdot \cos \theta, \quad \omega_z = \omega \cdot \sin \theta,$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{R_c^2}{R_s^2} \operatorname{tg} \varphi \right), \quad (11)$$

ahol θ az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor földfelszínétől mért szöge a φ földrajzi szélességen, $R_c = 6\,378\,000 \text{ m}$ a forgási ellipszoiddal közelített Föld sugara az Egyenlítőn, $R_s = 6\,357\,000 \text{ m}$ a Föld sugara a sarkokon.

$\mathbf{g}(\varphi)$: a φ földrajzi szélességen a (8) Cassini-formulával leírható $\mathbf{g}(\varphi) = [g_x = 0, g_y = 0, g_z = -g(\varphi)]$ földfelszíni nehézségi gyorsulásvektor nagysága, ami már magában foglalja a földforgás miatti centrifugális gyorsulást. A dobóversenyek helyszíneinek tengerszint fölötti magassága elhanyagolható a Föld sugarához képest, ezért a g tengerszint fölötti magasság növekedésével való kis csökkenését a továbbiakban elhanyagoljuk.

$2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \boldsymbol{\omega}$: Coriolis-gyorsulás,

$\mathbf{v}_{\text{szél}}$: a szél sebességvektora, amit a továbbiakban zérusnak veszünk, mert csak a szélcsendes meteorológiai helyzettel foglalkozunk.

$\frac{k\rho Q}{2} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{szél}} \right)^2$: a közegellenállási erő nagysága, ahol Q a súlygolyó ($Q_{\text{súlygolyó}} = 0,0095 \text{ m}^2$, $r_{\text{súlygolyó}} = 5,5 \text{ cm}$), illetve a kalapács ($Q_{\text{kalapács}} = 0,0138 \text{ m}^2$) homlokfelülete, k a súlygolyó ($k_{\text{súlygolyó}} = 0,47$), illetve a kalapács ($k_{\text{kalapács}} = 0,7$) közegellenállási tényezője (az utóbbiban benne foglaltatik a kalapács fogantyújának és vetődrótjának légellenállása is), ρ a levegő sűrűsége, ami a p légnyomástól és T léghőmérséklettől az ideális gázként kezelt levegő állapotegyenlete szerint függ:

$$\rho = \frac{p}{BT}, \quad B = 287,05 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}. \quad (12)$$

A (10) mozgásegyenlet minden fontos környezeti hatást magában foglal. Megoldásához negyedrendű Runge-Kutta-integrátort használtunk.

5. A súlygolyó és a kalapács világcúcskori kezdősebességének rekonstrukciója

A (10) mozgásegyenlet numerikus megoldásával a súly vagy a kalapács világcúcskori v kezdősebességét a következőképpen határoztuk meg. Vettük egy adott világcúcs L dobótávértékét. 30 m/s kezdősebesség feltevéssel (10)-et megoldva a g helyi gravitációs gyorsulás, H kezdőmagasság, α kezdőszög, β azimutuszög és ρ légsűrűség aktuális értékei mellett, megkaptuk a sportszer mozgáspályáját, ami a vízszintes talajt a kiindulási dobóhelytől q távolságban érte. Ha q kisebb vagy nagyobb volt, mint L , akkor v -t $\Delta v = 10^{-6}$ m/s-mal növeltük, illetve csökkentettük. Ezután (10)-et ismét megoldottuk a $v + \Delta v$ vagy $v - \Delta v$ új kezdősebességekkel, miáltal q új értékéhez jutottunk. Ezt az iterációt mindaddig folytattuk, amíg a $|q - L|$ különbség $\varepsilon = 10^{-6}$ m-nél kisebb lett. Így végül a sportszer L világcúcskori v kezdősebességét $\Delta v = 10^{-6}$ m/s pontossággal rekonstruáltuk.

Az 1–4. táblázat a felnőtt kültéri férfi és női súlylökés és kalapácsvetés időben monoton növekvő 20 legnagyobb L_i világcúcsát, a versenyhelyszínek φ_i földrajzi szélességét és a (8) Cassini-formulából számított helyi g_i

nehézségi gyorsulását, a sportolók nevét, állampolgárságát és h_i testmagasságát, a sportszer eldobásának egyéni H_i kezdőmagasságát, a sportszer számítógépes modellezéssel rekonstruált v_i kezdősebességét tartalmazza $\alpha_{\text{súlygolyó}} = 37^\circ$, $\alpha_{\text{kalapács}} = 44^\circ$, $d = 2,0$ m és $\beta_E = 0^\circ$ északi dobásazimutuszög mellett. A v_i oszlopbeli sorszámok e változó numerikus értékeinek nagyság szerinti sorrendjét tükrözik. A pirossal jelölt adatokat tartalmazó sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámától ($i \neq j$).

Számítógépes vizsgálataink elvégzése és e cikk megírása után a 2021 júniusában elért 23,37 m-es világcúcsot tartó, kétszeres olimpiai bajnok, harmincéves észak-amerikai Ryan Crouser súlylökő egy új világrekordot állított föl 23,56 m-es súlylökésével a 2023. május 27-én Los Angelesben rendezett atlétikai viadalon. E világcúcsot már nem volt időnk figyelembe venni jelen írásunkban.

6. A súlylökés és kalapácsvetés világcúcsrangsorainak változása

Az eltérő helyszíneken történő dobóversenyek többek között különböző környezeti viszonyainak dobótáv-

1. táblázat

Felnőtt kültéri férfi súlylökés. Az $i = 12., 13., 19., 20.$ sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámától ($i \neq j$). A φ földrajzi szélességet radiánban adjuk meg, mert a számítógépes programunk így használja, de persze bárki átválthatja fokra az $1 \text{ rad} \approx 57,2958^\circ$ összefüggés alapján

i	L_i (m)	φ_i (rad)	g_i (m/s ²)	Sportoló (állampolgárság)	h_i (m)	H_i (m)	v_i (m/s)	j
1.	23,37	0,7686	9,805	Ryan Crouser (USA)	2,01	2,320	$v_1 = 14,559$	$j = 1.$
2.	23,12	0,5945	9,797	Randy Barnes (USA)	1,95	2,260	$v_2 = 14,488$	$j = 2.$
3.	23,06	0,6198	9,798	Ulf Timmermann (GDR)	1,94	2,250	$v_3 = 14,471$	$j = 3.$
4.	22,91	0,7657	9,805	Alessandro Andrei (ITA)	1,91	2,220	$v_4 = 14,435$	$j = 4.$
5.	22,84	0,7657	9,805	Alessandro Andrei (ITA)	1,91	2,220	$v_5 = 14,410$	$j = 5.$
6.	22,72	0,7657	9,805	Alessandro Andrei (ITA)	1,91	2,220	$v_6 = 14,367$	$j = 6.$
7.	22,64	0,9166	9,813	Udo Beyer (GDR)	1,94	2,250	$v_7 = 14,334$	$j = 7.$
8.	22,62	0,9166	9,813	Ulf Timmermann (GDR)	1,94	2,250	$v_8 = 14,327$	$j = 8.$
9.	22,22	0,5943	9,797	Udo Beyer (GDR)	1,94	2,250	$v_9 = 14,172$	$j = 9.$
10.	22,15	1,0072	9,817	Udo Beyer (GDR)	1,94	2,250	$v_{10} = 14,162$	$j = 10.$
11.	22,00	0,8538	9,810	Aleksandr Baryshnikov (URS)	1,98	2,290	$v_{11} = 14,087$	$j = 11.$
12.	21,85	0,3721	9,787	Terence Albritton (USA)	1,94	2,250	$v_{12} = 14,032$	$j = 13.$
13.	21,82	0,6515	9,799	Allan Feuerbach (USA)	1,86	2,170	$v_{13} = 14,060$	$j = 12.$
14.	21,78	0,5341	9,794	Randel Matson (USA)	2,01	2,320	$v_{14} = 13,985$	$j = 14.$
15.	21,52	0,5341	9,794	Randel Matson (USA)	2,01	2,320	$v_{15} = 13,891$	$j = 15.$
16.	20,68	0,5943	9,797	Dallas Long (USA)	1,93	2,240	$v_{16} = 13,613$	$j = 16.$
17.	20,20	0,5943	9,797	Dallas Long (USA)	1,93	2,240	$v_{17} = 13,433$	$j = 17.$
18.	20,10	0,5943	9,797	Dallas Long (USA)	1,93	2,240	$v_{18} = 13,396$	$j = 18.$
19.	20,08	0,5943	9,797	Dallas Long (USA)	1,93	2,240	$v_{19} = 13,388$	$j = 20.$
20.	20,06	0,5938	9,797	Williem Nieder (USA)	1,90	2,210	$v_{20} = 13,392$	$j = 19.$

2. táblázat

Felnőtt kültéri női súlylökés. Az $i = 3., 4., 11., 12.$ sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámtól ($i \neq j$)

i	L_i (m)	φ_i (rad)	g_i (m/s ²)	Sportoló (állampolgárság)	h_i (m)	H_i (m)	v_i (m/s)	j
1.	22,63	0,9730	9,816	Natalya Lisovskaya (URS)	1,88	2,189	$v_1 = 14,391$	$j = 1.$
2.	22,60	0,9730	9,816	Natalya Lisovskaya (URS)	1,88	2,189	$v_2 = 14,381$	$j = 2.$
3.	22,53	0,7608	9,805	Natalya Lisovskaya (URS)	1,88	2,189	$v_3 = 14,348$	$j = 4.$
4.	22,45	0,9144	9,813	Ilona Slupianek (GDR)	1,79	2,099	$v_4 = 14,359$	$j = 3.$
5.	22,36	0,8070	9,807	Ilona Slupianek (GDR)	1,79	2,099	$v_5 = 14,322$	$j = 5.$
6.	22,32	0,8432	9,809	Helena Fibingerova (TCH)	1,79	2,099	$v_6 = 14,309$	$j = 6.$
7.	21,99	0,8716	9,811	Helena Fibingerova (TCH)	1,79	2,099	$v_7 = 14,191$	$j = 7.$
8.	21,89	0,7360	9,804	Ivanka Khristova (BUL)	1,72	2,029	$v_8 = 14,177$	$j = 8.$
9.	21,87	0,7360	9,804	Ivanka Khristova (BUL)	1,72	2,029	$v_9 = 14,169$	$j = 9.$
10.	21,67	0,8872	9,812	Marianne Adam (GDR)	1,83	2,139	$v_{10} = 14,060$	$j = 10.$
11.	21,60	0,9166	9,813	Marianne Adam (GDR)	1,83	2,139	$v_{11} = 14,035$	$j = 12.$
12.	21,57	0,8592	9,810	Helena Fibingerova (TCH)	1,79	2,099	$v_{12} = 14,038$	$j = 11.$
13.	21,45	0,7540	9,805	Nadezhda Chizhova (URS)	1,74	2,049	$v_{13} = 14,009$	$j = 13.$
14.	21,20	0,8699	9,811	Nadezhda Chizhova (URS)	1,74	2,049	$v_{14} = 13,921$	$j = 14.$
15.	21,03	0,8402	9,809	Nadezhda Chizhova (URS)	1,74	2,049	$v_{15} = 13,857$	$j = 15.$
16.	20,63	0,7608	9,805	Nadezhda Chizhova (URS)	1,74	2,049	$v_{16} = 13,705$	$j = 16.$
17.	20,43	0,9730	9,816	Nadezhda Chizhova (URS)	1,74	2,049	$v_{17} = 13,638$	$j = 17.$
18.	20,43	0,6629	9,800	Nadezhda Chizhova (URS)	1,74	2,049	$v_{18} = 13,627$	$j = 18.$
19.	20,10	0,6629	9,800	Nadezhda Chizhova (URS)	1,74	2,049	$v_{19} = 13,502$	$j = 19.$
20.	20,10	0,9166	9,813	Margitta Gummel (GDR)	1,77	2,079	$v_{20} = 13,499$	$j = 20.$

3. táblázat

Felnőtt kültéri férfi kalapácsvetés. Az $i = 11., 12., 16., 17., 18.$ sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámtól ($i \neq j$)

i	L_i (m)	φ_i (rad)	g_i (m/s ²)	Sportoló (állampolgárság)	h_i (m)	H_i (m)	v_i (m/s)	j
1.	86,74	0,8514	9,810	Yuriy Sedykh (URS)	1,85	1,778	$v_1 = 29,680$	$j = 1.$
2.	86,66	1,0374	9,819	Yuriy Sedykh (URS)	1,85	1,778	$v_2 = 29,679$	$j = 2.$
3.	86,34	0,9058	9,812	Yuriy Sedykh (URS)	1,85	1,778	$v_3 = 29,609$	$j = 3.$
4.	84,14	0,9730	9,816	Sergey Litvinov (URS)	1,80	1,728	$v_4 = 29,216$	$j = 4.$
5.	83,98	0,9730	9,816	Sergey Litvinov (URS)	1,80	1,728	$v_5 = 29,186$	$j = 5.$
6.	81,80	0,9730	9,816	Yuriy Sedykh (URS)	1,85	1,778	$v_6 = 28,767$	$j = 6.$
7.	81,66	0,7608	9,805	Sergey Litvinov (URS)	1,80	1,728	$v_7 = 28,734$	$j = 7.$
8.	80,64	0,7573	9,805	Yuriy Sedykh (URS)	1,85	1,778	$v_8 = 28,531$	$j = 8.$
9.	80,46	0,7573	9,805	Jüri Tamm (URS)	1,91	1,838	$v_9 = 28,486$	$j = 9.$
10.	80,38	0,7573	9,805	Yuriy Sedykh (URS)	1,85	1,778	$v_{10} = 28,482$	$j = 10.$
11.	80,32	0,8496	9,810	Karl-Hans Riehm (FRG)	1,95	1,878	$v_{11} = 28,460$	$j = 12.$
12.	80,14	0,9730	9,816	Boris Zaychuk (URS)	1,80	1,728	$v_{12} = 28,461$	$j = 11.$

3. táblázat (folyt.)

Felnőtt kültéri férfi kalapácsvetés. Az $i = 11., 12., 16., 17., 18.$ sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámtól ($i \neq j$)

i	L_i (m)	φ_i (rad)	g_i (m/s ²)	Sportoló (állampolgárság)	h_i (m)	H_i (m)	v_i (m/s)	j
13.	79,30	0,8746	9,811	Walter Schmidt (FRG)	1,92	1,848	$v_{13} = 28,272$	$j = 13.$
14.	78,50	0,8617	9,810	Karl-Hans Riehm (FRG)	1,95	1,878	$v_{14} = 28,111$	$j = 14.$
15.	77,56	0,8617	9,810	Karl-Hans Riehm (FRG)	1,95	1,878	$v_{15} = 27,930$	$j = 15.$
16.	76,70	0,8617	9,810	Karl-Hans Riehm (FRG)	1,95	1,878	$v_{16} = 27,763$	$j = 17.$
17.	76,66	0,8402	9,809	Aleksey Spiridonov (URS)	1,92	1,848	$v_{17} = 27,759$	$j = 18.$
18.	76,60	0,8961	9,812	Reinhard Theimer (GDR)	1,84	1,768	$v_{18} = 27,767$	$j = 16.$
19.	76,40	0,8437	9,809	Walter Schmidt (FRG)	1,92	1,848	$v_{19} = 27,709$	$j = 19.$
20.	75,48	0,8835	9,811	Anatolij Bondarchuk (URS)	1,83	1,758	$v_{20} = 27,549$	$j = 20.$

4. táblázat

Felnőtt kültéri női kalapácsvetés. Az L dobótáv i rangsorszáma minden sorban egyezik a v nagyság szerinti j sorszámmal ($i = j$)

i	L_i (m)	φ_i (rad)	g_i (m/s ²)	Sportoló (állampolgárság)	h_i (m)	H_i (m)	v_i (m/s)	j
1.	82,98	0,9116	9,813	Anita Wlodarczyk (POL)	1,78	1,708	$v_1 = 29,642$	$j = 1.$
2.	82,29	-0,3999	9,788	Anita Wlodarczyk (POL)	1,78	1,708	$v_2 = 29,467$	$j = 2.$
3.	81,08	0,9563	9,815	Anita Wlodarczyk (POL)	1,78	1,708	$v_3 = 29,264$	$j = 3.$
4.	79,58	0,9166	9,813	Anita Wlodarczyk (POL)	1,78	1,708	$v_4 = 28,957$	$j = 4.$
5.	79,42	0,8985	9,812	Betty Heidler (GER)	1,75	1,678	$v_5 = 28,929$	$j = 5.$
6.	78,30	0,9271	9,814	Anita Wlodarczyk (POL)	1,78	1,708	$v_6 = 28,698$	$j = 6.$
7.	77,96	0,9166	9,813	Anita Wlodarczyk (POL)	1,78	1,708	$v_7 = 28,627$	$j = 7.$
8.	77,80	1,0374	9,819	Tatyana Lysenko (RUS)	1,86	1,788	$v_8 = 28,588$	$j = 8.$
9.	77,41	0,9704	9,816	Tatyana Lysenko (RUS)	1,86	1,788	$v_9 = 28,504$	$j = 9.$
10.	77,26	0,9460	9,814	Gulfiya Khanafeyeva (RUS)	1,73	1,658	$v_{10} = 28,494$	$j = 10.$
11.	77,06	0,9730	9,816	Tatyana Lysenko (RUS)	1,86	1,788	$v_{11} = 28,432$	$j = 11.$
12.	76,07	0,8306	9,809	Mihaela Melinte (ROU)	1,70	1,628	$v_{12} = 28,248$	$j = 12.$
13.	76,05	0,8306	9,809	Mihaela Melinte (ROU)	1,70	1,628	$v_{13} = 28,243$	$j = 13.$
14.	75,97	0,7990	9,807	Mihaela Melinte (ROU)	1,70	1,628	$v_{14} = 28,224$	$j = 14.$
15.	75,29	0,7990	9,807	Mihaela Melinte (ROU)	1,70	1,628	$v_{15} = 28,083$	$j = 15.$
16.	73,14	0,7959	9,807	Mihaela Melinte (ROU)	1,70	1,628	$v_{16} = 27,635$	$j = 16.$
17.	73,10	0,8402	9,809	Olga Kuzenkova (RUS)	1,76	1,688	$v_{17} = 27,618$	$j = 17.$
18.	71,22	0,8402	9,809	Olga Kuzenkova (RUS)	1,76	1,688	$v_{18} = 27,222$	$j = 18.$
19.	69,58	0,7754	9,806	Mihaela Melinte (ROU)	1,70	1,628	$v_{19} = 26,880$	$j = 19.$
20.	69,42	0,8163	9,808	Mihaela Melinte (ROU)	1,70	1,628	$v_{20} = 26,849$	$j = 20.$

ra kifejtett hatásait csak úgy lehetne kiküszöbölni, ha a sportolók azonos környezetben dobnának. Például ugyanazon g nehézségi gyorsulás mellett, azonos β azimutirányban és egyforma meteorológiai viszonyok között történnének a dobások. Tekintsük azt a képzelt hely-

zetet, hogy a világcsúcstartók a világcsúcsukkor elért v kezdősebességgel nem különböző földrajzi szélességek eltérő g nehézségi gyorsulásai mellett és eltérő β azimutirányba dobnak, hanem ugyanazon g és β mellett. Az 5. és 6. táblázatok így hasonlítják össze az L dobótávokat.

5. táblázat

A felnőtt kültéri női súlylökés számítógépes modellezéssel kapott $L_{i,j}$ (sor: $i = 19, 20$; oszlop: $j = 1, 2, \dots, 6$) (m) dobótávjai az ellökött súlygolyók 2. táblázatbeli, számítógépes modellezéssel rekonstruált v_i (m/s) kezdősebességei és a sportversenyek φ_j földrajzi szélességen lévő helyszíneinek g_j (m/s²) nehézségi gyorsulásai esetén, $\alpha = 37^\circ$, valamint $\beta_E = 0^\circ$ (északi dobásazimut), $\beta_K = 90^\circ$ (kelet) és $\beta_N = 270^\circ$ (nyugat) azimutszögek mellett. A mátrix kövér L_{19}, L_{20} elemei és kövér $i = 19., 20.$ sorszámai a 2. táblázatbeli $i = 19., 20.$ világcsúccsal azonosak. Egy adott j oszlopbeli L_i távolságok és $k = 19., 20.$ sorszámok a g_j nehézségi gyorsulás mellett fiktiivén lefolytatott versenyen elérhető dobótávokat és azok rangsorrendjét tükrözik, mintha mindkettő súlylökőnő ugyanazon g_j mellett lökött volna a világcsúcs felállításakor v_i kezdősebességgel és α kezdőszöggel északra (E: $\beta_E = 0^\circ$), keletre (K: $\beta_K = 90^\circ$) vagy nyugatra (N: $\beta_N = 270^\circ$). A g_j nehézségi gyorsulás zárójelbeli indexei a 2. táblázatbeli, gyakorlatilag ($\Delta g_{\max} = 0,002$ m/s²) azonos nagyságú gyorsulások indexeivel egyeznek meg. A pirossal jelzett adatok esetén i eltér k -tól ($i \neq k$)

H_i (m)	v_i (m/s)	$g_{1(1,2,17)} = 9,816$ $\varphi_1 = 0,9730$	$g_{2(3,8,9,13,16)} = 9,805$ $\varphi_2 = 0,7608$	$g_{3(4,10,11,20)} = 9,813$ $\varphi_3 = 0,9144$	$g_{4(5)} = 9,807$ $\varphi_4 = 0,8070$	$g_{5(6,7,12,14,15)} = 9,809$ $\varphi_5 = 0,8432$	$g_{6(18,19)} = 9,800$ $\varphi_6 = 0,6629$
$i = 19.$ $H_{19} =$ 2,049	$i = 19.$ $v_{19} =$ 13,502	$k = 20.$ E: 20,070 K: 20,072 N: 20,069	$k = 20.$ E: 20,090 K: 20,092 N: 20,089	$k = 20.$ E: 20,076 K: 20,077 N: 20,075	$k = 20.$ E: 20,087 K: 20,088 N: 20,085	$k = 20.$ E: 20,083 K: 20,085 N: 20,082	$i = 19., L_{19} = 20,10$ $k = 20.$ E: 20,100 K: 20,101 N: 20,098
$i = 20.$ $H_{20} =$ 2,079	$i = 20.$ $v_{20} =$ 13,499	$k = 19.$ E: 20,094 K: 20,095 N: 20,092	$k = 19.$ E: 20,114 K: 20,115 N: 20,112	$i = 20., L_{20} = 20,10$ $k = 19.$ E: 20,099 K: 20,100 N: 20,098	$k = 19.$ E: 20,110 K: 20,112 N: 20,108	$k = 19.$ E: 20,106 K: 20,108 N: 20,105	$k = 19.$ E: 20,123 K: 20,124 N: 20,121

6. táblázat

A felnőtt kültéri férfi kalapácsvetés számítógépes modellezéssel kapott $L_{i,j}$ (sor: $i = 1, 2, 10, 11$; oszlop: $j = 1, 2, \dots, 5$) (m) dobótávjai az elvetett kalapácsok 3. táblázatbeli, számítógépes modellezéssel rekonstruált v_i (m/s) kezdősebességei és a sportversenyek φ_j földrajzi szélességen lévő helyszíneinek g_j (m/s²) nehézségi gyorsulásai esetén, $\alpha = 44^\circ$, valamint $\beta_E = 0^\circ$ (északi dobásazimut), $\beta_K = 90^\circ$ (kelet) és $\beta_N = 270^\circ$ (nyugat) azimutszögek mellett. A mátrix kövér L_1, L_2, L_{10}, L_{11} elemei és kövér $i = 1., 2., 10., 11.$ sorszámai a 3. táblázatbeli $i = 1., 2., 10., 11.$ világcsúccsal azonosak. Egy adott j oszlopbeli L_i távolságok és $k = 1., 2., 10., 11.$ sorszámok a g_j nehézségi gyorsulás mellett fiktiivén lefolytatott versenyen elérhető dobótávokat és azok rangsorát tükrözik, mintha mind a 4 kalapácsvető ugyanazon g_j mellett vetett volna a világcsúcsakor v_i kezdősebességgel és α kezdőszöggel északra (E: $\beta_E = 0^\circ$), keletre (K: $\beta_K = 90^\circ$) vagy nyugatra (N: $\beta_N = 270^\circ$). A g_j nehézségi gyorsulás zárójelbeli indexei a 3. táblázatbeli, gyakorlatilag ($\Delta g_{\max} = 0,002$ m/s²) azonos nagyságú gyorsulások indexeivel egyeznek meg. A pirossal jelzett adatok esetén i nem mindig azonos k -val

H_i (m)	v_i (m/s)	$g_{1(1,11,14,15,16,17,19)} = 9,810$ $\varphi_1 = 0,8514$	$g_{2(2)} = 9,819$ $\varphi_2 = 1,0374$	$g_{3(3,13,18,20)} = 9,812$ $\varphi_3 = 0,9058$	$g_{4(4,5,6,12)} = 9,816$ $\varphi_4 = 0,9730$	$g_{5(7,8,9,10)} = 9,805$ $\varphi_5 = 0,7608$
$i = 1.$ $H_1 =$ 1,778	$i = 1.$ $v_1 =$ 29,680	$i = 1., L_1 = 86,74$ $k = 1.(2.)$ E: 86,741 $k = 1.$ K: 86,752 $k = 1.(2.)$ N: 86,730	$k = 1.(2.)$ E: 86,667 $k = 1.$ K: 86,676 $k = 1.(2.)$ N: 86,659	$k = 1.(2.)$ E: 86,725 $k = 1.$ K: 86,735 $k = 1.(2.)$ N: 86,714	$k = 1.(2.)$ E: 86,692 $k = 1.$ K: 86,701 $k = 1.(2.)$ N: 86,682	$k = 1.(2.)$ E: 86,782 $k = 1.$ K: 86,795 $k = 1.(2.)$ N: 86,770
$i = 2.$ $H_2 =$ 1,778	$i = 2.$ $v_2 =$ 29,679	$k = 2.(1.)$ E: 86,736 $k = 2.(1.)$ K: 86,747 $k = 2.$ N: 86,725	$i = 2., L_2 = 86,66$ $k = 2.(1.)$ E: 86,662 $k = 2.(1.)$ K: 86,670 $k = 2.$ N: 86,653	$k = 2.(1.)$ E: 86,719 $k = 2.(1.)$ K: 86,730 $k = 2.$ N: 86,709	$k = 2.(1.)$ E: 86,687 $k = 2.(1.)$ K: 86,696 $k = 2.$ N: 86,677	$k = 2.(1.)$ E: 86,777 $k = 2.(1.)$ K: 86,789 $k = 2.$ N: 86,765
$i =$ 10. $H_{10} =$ 1,778	$i = 10.$ $v_{10} =$ 28,482	$k = 10.$ E: 80,343 K: 80,353 N: 80,333	$k = 10.$ E: 80,274 K: 80,282 N: 80,267	$k = 10.$ E: 80,327 K: 80,337 N: 80,318	$k = 10.$ E: 80,297 K: 80,306 N: 80,289	$i = 10., L_{10} = 80,38$ $k = 10.$ E: 80,381 $k = 10.$ K: 80,392 $k = 10.(11.)$ N: 80,370
$i =$ 11. $H_{11} =$ 1,878	$i = 11.$ $v_{11} =$ 28,460	$i = 11., L_{11} = 80,32$ $k = 11.$ E: 80,322 K: 80,332 N: 80,312	$k = 11.$ E: 80,253 K: 80,261 N: 80,246	$k = 11.$ E: 80,306 K: 80,316 N: 80,297	$k = 11.$ E: 80,276 K: 80,284 N: 80,268	$k = 11.$ E: 80,360 $k = 11.(10.)$ K: 80,371 $k = 11.$ N: 80,349

Az 5. táblázat szerint, ha a 19. (Nadezhda Chizhova²) és a 20. (Margitta Gummel) súlylökőnő ugyanazon g nehézségi gyorsulás mellett lőkött volna a világcsúcsuk elérésekori $v_{19} = 13,502$ m/s, illetve $v_{20} = 13,499$ m/s kezdősebességgel, akkor függetlenül a dobásuk β azimutirányától és az aktuális g nehézségi gyorsulástól az eredetileg egyforma $L_{19} = L_{20} = 20,10$ m dobótávjuk úgy változott volna, hogy Nadezhda Chizhova $L_{19,E,K,N}$ dobótávja kisebb lett volna Margitta Gummel $L_{20,E,K,N}$ dobótávjánál ($L_{19,E,K,N} < L_{20,E,K,N}$), vagyis a rangsorszámuk fölcserélődött volna egymással: 19. \leftrightarrow 20.

A 2. táblázat szerint Nadezhda Chizhova ($h_{19} = 1,74$ m) Margitta Gummelhez ($h_{20} = 1,77$ m) képest 3 cm-es testmagassághátrányban ($h_{19} < h_{20}$) volt, ami csökkentette az előbbi dobótávját. Ugyanakkor Nadezhda Chizhova ($g_{19} = 9,800$ m/s²) előnyben volt Margitta Gummelhez ($g_{20} = 9,813$ m/s²) képest a kisebb helyi g nehézségi gyorsulás miatt ($g_{19} < g_{20}$), ami növelte az előbbi dobótávját. Az azonos g melletti súlylökéskor bekövetkező 19. \leftrightarrow 20. rangsorszámcsere oka a g és h együttes hatása a dobótávra. Mindezen még a dobás β azimutirányának esetleges különbözőségéből eredő Coriolis-gyorsulás okozta dobótávváltozás sem lett volna képes változtatni.

Ugyanakkor, ha a súlygolyó v kezdősebességén alapulna a világcsúcsrangsor, akkor Nadezhda Chizhova ($v_{19} = 13,502$ m/s) maradna a 19. helyezett és Margitta Gummel ($v_{20} = 13,499$ m/s) is megtartaná a 20. helyezését, mert $v_{19} > v_{20}$, ám ekkor a $v_4 = 14,359$ m/s $>$ $v_3 = 14,348$ m/s és $v_{12} = 14,038$ m/s $>$ $v_{11} = 14,035$ m/s kezdősebességviszonyok miatt bekövetkezne a 3. \leftrightarrow 4. és 11. \leftrightarrow 12. rangsorszámcsere (2. táblázat).

A 6. táblázat szerint az 1. (Yuriy Sedykh) és a 2. (Yuriy Sedykh) kalapácsvetővilágcsúcs esetén 1. \leftrightarrow 2. rangsorszámcsere lépett volna föl, amennyiben azonos g mellett történt volna mindkét vetés a világcsúcs elérésekori v kezdősebességgel, ha az 1. vetés észak (E) felé történt volna, a 2. pedig kelet (K) felé, amikor is $L_{1,E} < L_{2,K}$ lett volna a dobótávviszony. i) Ekkor a Coriolis-gyorsulás az 1. vetés északi ($\beta_E = 0^\circ$) dobótávját nem változtatta volna, míg a 2. vetés keleti ($\beta_K = 90^\circ$) dobótávját kicsivel növelte volna. ii) Másodrészt, az 1. vetés kalapácsának nagyobb kezdősebessége ($v_1 = 29,680$ m/s) növelte a dobótávot a 2. vetéséhez képest, ami kisebb kezdősebességgel ($v_2 = 29,679$ m/s) történt. iii) Mivel mindkét világcsúcsot ugyanaz a kalapácsvető, Yuriy Sedykh érte el, a h testmagasság nem játszott szerepet a rangsorszámcsereben. Itt tehát a β azimutirány és a v kezdősebesség együttes hatásai (az előbbi dominanciája az utóbbi felett) okozták volna az $L_{1,E} < L_{2,K}$ dobótávviszony miatti 1. \leftrightarrow 2. rangsorszámcsereét.

A 6. táblázat szerint ugyancsak 1. \leftrightarrow 2. rangsorszámcsere lépett volna föl, amennyiben azonos g mellett történt volna mindkét vetés a világcsúcs elérésekori v kezdősebességgel, ha az 1. vetés nyugat (N) felé történt volna, a 2. pedig észak (E) vagy kelet (K) felé, amikor is $L_{1,N} < L_{2,E} < L_{2,K}$ lett volna a dobótávviszony. i) Ekkor a Coriolis-gyorsulás az 1. vetés nyugati ($\beta_N = 270^\circ$) dobótávját

csökkentette volna, míg a 2. északi ($\beta_E = 0^\circ$) dobótávját nem változtatta volna, és a keleti ($\beta_K = 90^\circ$) dobótávját kicsivel növelte volna. ii) Másodrészt, az 1. vetés kalapácsának nagyobb kezdősebessége ($v_1 = 29,680$ m/s) növelte a dobótávot a kisebb kezdősebességű ($v_2 = 29,679$ m/s) 2. vetéséhez képest. iii) A h testmagasság nyilván itt sem játszott szerepet e rangsorszámcsereben. Itt megint a β azimutirány és a v kezdősebesség együttes hatásai (illetve az előbbi dominanciája) okozták volna az $L_{1,N} < L_{2,E} < L_{2,K}$ dobótávviszony miatti 1. \leftrightarrow 2. rangsorszámcsereét. Ha viszont azonos északi, keleti vagy nyugati azimutirányba történtek volna a kalapácsvetések egy adott sportpályára (azonos g) ugyanazon dobóköréből (azonos β), akkor maradt volna a kezdősebesség által meghatározott $L_{1,E,K,N} > L_{2,E,K,N}$ dobótávfölény, azaz nem változtak volna az 1. és 2. rangsorszámok (6. táblázat). Itt is a Coriolis-gyorsulás hatása lett volna a felelős az említett rangsorszámcsereért.

A 6. táblázat szerint a 10. (Yuriy Sedykh) és a 11. (Karl-Hans Riehm) kalapácsvetővilágcsúcs esetén rangsorszámcsere történt volna, amennyiben mindkét kalapácsvető a $\varphi_s = 43,59^\circ$ földrajzi szélesség $g_{s(7,8,9,10)} = 9,805$ m/s² nehézségi gyorsulása mellett vetett volna a világcsúcsa elérésekori v kezdősebességgel, ha a 10. helyezett nyugat (N) felé vetett volna, a 11. pedig kelet (K) felé, amikor is $L_{10,N} = 80,370$ m $<$ $L_{11,K} = 80,371$ m lett volna a dobótávviszony. i) Ekkor a Coriolis-gyorsulás a 11. helyezett keleti ($\beta_K = 90^\circ$) irányú dobótávját kissé megnövelte volna, míg a 10. helyezett nyugati ($\beta_N = 270^\circ$) irányú dobótávját kicsivel csökkentette volna. ii) Másodrészt, a 11. helyezett kalapácsának kisebb kezdősebessége ($v_{11} = 27,744$ m/s) csökkentette a dobótávot a 10. helyezettéhez képest, aki nagyobb kezdősebességgel ($v_{10} = 27,766$ m/s) vetette el a kalapácsot. iii) Harmadrészt, a 10. helyezett ($h_{10} = 1,85$ m) 10 cm-es testmagassághátránya csökkentette a dobótávot a magasabb 11. helyezettéhez ($h_{11} = 1,95$ m) viszonyítva (3. táblázat). iv) Negyedrész, a 10. helyezett eredetileg kisebb nehézségi gyorsulás ($g_{10} = 9,805$ m/s²) mellett vetett, ami növelte a dobótávot a 11. helyezettéhez képest, aki nagyobb nehézségi gyorsulás mellett ($g_{11} = 9,810$ m/s²) vetett, ami csökkentette a dobótávját (3. táblázat). Itt a β azimutirány, v kezdősebesség, h testmagasság és g nehézségi gyorsulás együttes hatásai okozták volna az $L_{10,N} < L_{11,K}$ dobótávviszony miatti 10. \leftrightarrow 11. rangsorszámcsereét. Ha viszont e két kalapácsvető azonos északi, keleti vagy nyugati azimutirányba vetette volna a kalapácsot egy adott sportpályára (azonos g) ugyanazon dobóköréből (azonos β), akkor maradt volna az $L_{10,E,K,N} > L_{11,E,K,N}$ dobótávfölény, azaz nem változott volna az eredeti 10. és 11. rangsorszám (6. táblázat). Ezért itt is főleg a Coriolis-gyorsulás hatása lett volna felelős az említett rangsorszámcsereért.

Ugyanakkor, ha a kalapács v kezdősebességére alapulna a világcsúcsrangsor, akkor a 3. táblázat szerint a $v_{12} = 28,461$ m/s $>$ $v_{11} = 28,460$ m/s kezdősebességviszony miatt bekövetkezne a 11. \leftrightarrow 12. rangsorszámcsere, továbbá a $v_{18} = 27,767$ m/s $>$ $v_{16} = 27,763$ m/s $>$ $v_{17} = 27,759$ m/s viszony okán az eredeti 18. lenne az új 16., az eredeti 16. lenne az új 17., és az eredeti 17. lenne az új 18.

² Ebben a cikkben az orosz neveket a magyar átírás helyett az orosz nemzetközi latinbetűs átírása szerint írjuk.

Mint korábban említettük, az eltérő helyszíneken történő dobóversenyek eltérő környezeti viszonyainak dobótávra kifejtett hatásait csak úgy lehetne kiküszöbölni, ha a sportolók azonos környezetben dobnának. Mivel ez gyakorlatilag kivitelezhetetlen, érdemes lenne a súlygolyó v kezdősebességét tekinteni rangadó mértéknek.

A Föld északi (déli) féltekéjén a Coriolis-gyorsulás az óramutató járásával egyezően (ellentétesen) téríti el egy repülő test pályáját. Természetesen e jelenséget is figyelembe vettük a számítógépes modellünkben, aminek (10) mozgásegyenletében a Coriolis-gyorsulás vektoriális formában szerepel. A súlylökés 40 és a kalapácsvetés 40 vizsgált világcsúcsa közül egyedül a lengyel Anita Wlodarczyk kalapácsvetése történt a déli féltekén lévő brazil Rio de Janeiro $\varphi = -22,91^\circ$ földrajzi szélességén, míg a többi 79 másik világcsúcsot az északi féltekén érték el (1–4. táblázat).

7. Következtetések

- 1) A súlygolyó és a kalapács v kezdősebességének nagysága sokkal jobban tükrözi a sportoló saját fizikai teljesítményét, mint az L dobótáv, mert utóbbit a földrajzi szélességtől függő helyi g nehézségi gyorsulás mellett leginkább a sportoló h testmagassága és több más környezeti hatás is befolyásolja, elsősorban a légsűrűségtől és szélességtől függő légellenállás. Ezért az egyforma esély és a *fair play* (tisztá eszközökkel játszott mérkőzés és az ellenféllel szemben tanúsított sportszerű magatartás) eszméje értelmében helyénvalóbb lenne a sportszer v kezdősebességét tekinteni a sportoló környezeti hatásoktól mentes saját, igazi, rangadó teljesítményének és ez alapján megállapítani a rangsorrendet – ahelyett, hogy szokás szerint az L dobótávokat mérnék össze. A sportszer v kezdősebességét ultrahangos vagy lézer-doppler elven működő berendezéssel lehet mérni a helyszínen.
- 2) Ha a súlygolyó v kezdősebességét tekintenék rangadónak, akkor a kültéri női és férfi súlylökés világcsúcsrangosoraiban több rangsorszámcsere és rangsorszámazonosság lépne föl. Ha viszont azonos azimutirányokba történtek volna a súlylökések azonos helyi g mellett, akkor nem változtak volna a rangsorszámok.
- 3) Ha a kalapács v kezdősebességét tekintenék rangadónak, akkor a kültéri férfi kalapácsvetés világcsúcsrangosorában rangsorszámcsere és rangsorszámváltozások történnének.
- 4) A valóságot jól modellező, a légellenállást és a Coriolis-erőt is figyelembe vevő számítógépes vizsgálatokkal kapott eredmények nagy része egyezik a légellenállást és Coriolis-erőt elhanyagoló analitikus becslésekeivel. Ennek oka, hogy a súlygolyó és kalapács súlyához képest igen kicsik a légellenállási és Coriolis-erők, amelyek ezért csak kis mértékben befolyásolják a dobótávot.
- 5) A súlylökők és kalapácsvetők h testmagasság-különbségeiből eredő L dobótávbeli előnyök és hátrányok

kiküszöbölése céljából a versenyzőknek egy emelhető-süllyeszthető dobókörből állandó H kezdőmagasság mellett kellene eldobniuk a sportszerüket.

Irodalom

- Brosche P., Sündermann J. (1978): Tidal Friction and the Earth's Rotation. Springer: Heidelberg, Berlin, New York
- Hinze W. J., Frese von R. R. B., Saad A. H. (2013): Gravity and Magnetic Exploration: Principles, Practices, and Applications. Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-32819-8)
- Hegedűs D. (2022): A kültéri felnőtt férfi és női súlylökés és kalapácsvetés világcsúcsrangosorainak változásai a Föld forgása miatti centrifugális gyorsulás és a testmagasság dobótávra kifejtett hatásainak figyelembevételével. BSc-szakdolgozat, ELTE TTK, Biológiai Fizika Tanszék, Budapest, 54 o. (témavezető: Horváth Gábor)
- Horváth G. (1991): A holdak kötött keringése, az árapály-effektus és az árapályfűtés. Fizikai Szemle 41: 79–88.
- Horváth G. (2001): (2004: 2. változatlan kiadás) A mechanika biológiai alkalmazása: Biomechanika. Egyetemi tankönyv, 262 o., ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, ISBN 963-463-379-X
- Horváth G. (2009): Biomechanika: A mechanika biológiai alkalmazásai. Egyetemi tankönyv, 3. átdolgozott, bővített kiadás, 368 o., ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, ISBN 978-963-284-052-9
- Horváth G., Hegedűs D., Slíz-Balogh J. (2023): Change of world-record rankings of shot put and hammer throw due to the effects of Earth rotation and athlete's height. Scientific Reports 13: 10409 (DOI: 10.1038/s41598-023-36665-5)
- Jánosi I., Bántay P. (2002): Statistical test of throwing events on the rotating Earth: lack of correlations between range and geographic location. European Physical Journal B 30: 411–415.
- Jordan T. (1977): Terry Albritton – T & FN interview. Track & Field News 1977 March: pp. 11–12.
- Konz S. M., Hunter I. (2015): Technique comparison of male and female hammer throwers. pp. 1038–1041. In: Coaching and Sports Activities. edited by Colloud F, Domalain M, Monnet T. 33. International Conference on Biomechanics in Sports. Poitiers, France, 29 June – 3 July 2015
- Landau L. D., Lifshic E. M. (1984): Elméleti fizika I.: Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest
- Linthorne N. P. (2001): Optimum release angle in the shot put. Journal of Sports Sciences 19(5): 359–372 (DOI: 10.1080/02640410152006135)
- Marik M. (szerk.) (1989): Csillagászat. Akadémiai Kiadó, Budapest
- Megede E., Hymans R. (eds) (1991): Progression of World Best Performances and IAAF Approved World Records. International Athletic Foundation
- Mizera F., Horváth G. (2000): Dobósportok a forgó Földön. Hogyan befolyásolja a dobótávot a centrifugális és a Coriolis-erő? I. + II. rész Természet Világa 131: 402–405. + 457–461.
- Mizera F., Horváth G. (2002): Influence of environmental factors on shot put and hammer throw range. Journal of Biomechanics 35 (6): 785–796 (DOI: 10.1016/S0021-9290(02)00029-5)
- Pálfi K. (2021): A forgó és keringő Föld tehetetlenségi gyorsulásai a dobósportok biomechanikája háttérül. BSc-szakdolgozat, ELTE TTK, Biológiai Fizika Tanszék, Budapest, 38 o. (témavezető: Horváth Gábor, konzulens: Slíz-Balogh Judit)
- Pálfi K., Horváth G., Slíz-Balogh J. (2022): A Föld felszínén fellépő gyorsulások a dobósportok biomechanikája háttérül. 1. rész: Árapály és forgáslassulás. 2. rész: Precesszió, nutáció, Coriolis- és centrifugális gyorsulás. Fizikai Szemle 72 (4): 99–103., 72 (5): 131–134.
- Scrutton C. T. (1978): Periodic growth features in fossil organisms and the length of the day and month. In: Brosche P., Sündermann J. (eds) Tidal Friction and the Earth's Rotation. Springer: Heidelberg, Berlin, New York
- Varga P. (2014): A naphosszúság változása – Hatásai a Föld és az élet fejlődésére. Természet Világa 145: 546–548.
- Völgyesi L. (2013): A Föld precessziós mozgása. Fizikai Szemle 63: 152–156.
- White C. (2011): Projectile Dynamics in Sport: Principles and Applications. Routledge, Abingdon, Oxon, UK

A párizsi olimpia bajnokai



Ethan Katzberg



Ryan Crouser

és magyar versenyzők



Halász Bence



Nemes Rita