

fizikai szemle

AZ EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT LAPJA

Alapította Eötvös Loránd 1891-ben Mathematikai és Physikai Lapok néven

XXXVII. évfolyam

11. szám

1987. november

GRAVITÁCIÓS REAKCIÓK SZÁMÍTÓGÉPES MODELLEZÉSE I. (Bolygó-hold-mesterséges hold rendszerek)

HORVÁTH GÁBOR– JÁNOSI IMRE
ELTE, fizikushallgatók

különlenyomat

406– 411

HU ISSN 0015– 3257

GRAVITÁCIÓS REAKCIÓK SZÁMÍTÓGÉPES MODELLEZÉSE I. (Bolygó-hold-mesterséges hold rendszerek)

Horváth Gábor— Jánosi Imre
ELTE, fizikushallgatók

1. Bevezetés

A gravitációs kéttest-probléma, mint köztudott, analitikusan, egzaktul megoldható, eredményül a jól ismert ellipszis-, parabola- vagy hiperbola-pályák adódnak a kezdőfeltételektől függően. Az égimechanika ezen fejezete oly kiforrott, klasszikus s mondhatni egyszerű, hogy a tényismertetés, a leírás szintjén már az elemi iskolás tananyagba is bevonult a Kepler-féle törvények formájában. Az érdeklődőbb tanulók akár személyi számítógépükön is megoldhatják numerikusan a Newton-egyenletet a kéttest-problémára, s visszakaphatják a három jellegzetes kúpmeteszet pályát.

A probléma egyszerűsége, viszonylag könnyen megoldhatósága azonban hamar unalmassá teheti a megírt programot, hiszen néhány kezdőfeltétel betáplálása után hamar kimerül a lehetséges pályák tárháza, s ugyanazon esetek ismétlődhetnek csupán unos-untalan.

A gravitációs többtest-probléma (már a háromtest-probléma is) csupán néhány speciális esetben oldható meg egzaktul, analitikusan, általában csakis numerikus, számítógépes megoldáshoz vagyunk kénytelenek folyamodni. Kárpótolhatnak azonban az egzakt-ság elvesztéséért az eredményül adódó igen változatos pályakonfigurációk. Jelen cikkünkben azt a célt tűztük ki magunk elé, hogy túllépjünk a szokványos, "iskola szagú" Kepler-törvények számítógépes demonstrációján és a mai, élő égimechanikai problémák közvetlen, egyszerűsített modelljét adjuk, azzal a nem titkolt szándékkal, hogy kedvet csináljunk a fizika, csillagászat és űrkutatás iránt érdeklődő tanulóknak, tanároknak.

Ehhez a lehető legegyszerűbb, de a kéttest-problémán túlmutató esetet, a redukált háromtest-problémát választottuk (vagyis azt, amikor két jelentős gravitáló tömeggel rendelkező objektum gravitációs terében vizsgáljuk egy ezekhez képest elhanyagolható tömeggel bíró kis test mozgását), mely nem igényel a Kepler-probléma számítógépes szimulációjánál mélyebb ismereteket és sokkal több gépidőt, ugyanakkor sokkal érdekesebb, változatosabb gravitációs reakciók egyszerű modelljeit kaphatjuk meg vele.

Gravitációs reakción lényegében a gravitációs többtest-problémát értjük arra a felfogásra gondolván, hogy az érdekesebb, bonyolultabb pályakonfigurációk keletkezéséhez nem elegendő csak két gravitáló tömeg, kell legalább egy harmadik is, amely perturbáló hatásával mintegy "katalizálja" a rendszert, s vezet végül a reakció lezajlása után az eredeti

állapottól sokszor teljesen eltérő pályákhoz. Ily módon a Kepler-problémát kirekesztjük a gravitációs reakció fogalomköréből.

Mielőtt megadjuk a redukált háromtest-probléma számítógépes szimulációjának receptjét, s beszámolnánk a főbb, érdekesebb futtatási eredményekről, aktualizáljuk témánkat napjaink égimechanikai problémái közül kettőt röviden ismertetve, melyek az általunk bemutatandó egyszerű gravitációs reakcióhoz hasonlókkal is jól modellezhetők.

2. Gravitációs reakció a kometológia szolgálatára

A NASA (Amerikai Űrkutatási Hivatal) nem a Halley-üstökös felé indított űrszondát — mint a többi érintett ország a Halley-program keretében —, hanem az amerikai kutatók a Giacobini-Zinner üstökösöt vették célba az ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer) mesterséges holddal, melynek pályáját igen bonyolult égimechanikai manőverek sorozatának végrehajtásával módosították úgy, hogy végül is az időközben ICE (International Cometary Explorer) névre átkeresztelt űrszonda az emberiség első űrrandevúját tette lehetővé az említett üstökössel. Az ICE- és Halley-program eredményeiről [1]-ben olvashatunk összefoglalót.

Az ISEE jelű űreszközhármast a Nemzetközi Magnetoszféra Vizsgálat (IMS) keretében a földi magnetoszférát tanulmányozta. A NASA által készített ISEE-3 a napszél fizikai tulajdonságait mérte 1978 augusztusi felbocsátását követően úgy, hogy a Nap-Föld-rendszer egyik Lagrange-féle librációs pontja körül végzett keringéseket féléves periódussal, elnyújtott ellipszis mentén, a Földtől a Nap irányában mintegy 1,5 millió km-re.

Mint ahogy az ISEE-3 pályakorrekciókra tartalékolt hajtóanyagának jelentős része megmaradt, ezért lehetővé vált, hogy a hajtómű ki-bekapcsolásával letéritek a librációs pont körüli ellipszis pályáról, s egy a Föld körül húzódó igen bonyolult, számos hurkot is tartalmazó pályán — miközben ötször megközelítette a Holdat — felgyorsították olyan sebességre, hogy elhagyhatta a Föld-Hold-rendszert, s Nap körüli pályára állhatott, majd találkozhatott a Giacobini-Zinner üstökössel. A kozmikus manőverek közül eddig az emberiség történetében ez volt a legbonyolultabb, s igen összetett égimechanikai pályaszámítási feladatok elé állította a kutatókat. (További részleteket lásd: [2]-ben).

Végez eredményben a Hold, mint harmadik perturbáló égitest tette lehetővé, hogy az ICE a kellő sebes-

ségre gyorsulhasson fel és megfelelően irányítódhasson a szóbanforgó üstökössel való találkozáshoz úgy, hogy közben maximálisan takarékoskodhasson a kisebb pályakorrekciókhoz szükséges, értékes hajtóanyaggal. Az ICE-program a gravitációs reakció, a redukált háromtest-probléma egyik legszebb megnyilvánulása volt.

3. Gravitációs reakció a planetológia érdekében

A NASA egyik űrrepülőgépének kellett volna pályára állítania 1986 májusában a Galileo műszeregyüttest, aminek az lett volna a feladata, hogy mintegy 2 évnyi utazás után elérve a Jupitert, annak légkörét, holdjait, magnetoszféráját tanulmányozza. A sajnálatos Challenger-katasztrófa miatt azonban előre nem látható ideig elnapolódott ez az egyik legnagyobb szabású planetológiai vállalkozás. A Galileo-szonda elérve a Jupitert az óriásbolygó körüli pályára állna s körülötte keringve közvetítené mérési eredményeit a Földre, ellentétben a Jupiter mellett korábban elszárguló Pioneer és Voyager űrszondákkal, melyek csak néhány napos megfigyeléseket végezhettek tovarepülésük miatt. Ezen kívül a Galileo-szonda egy leszálló egységet bocsátana a Jupiter légkörébe.

A grandiózus programból — melyről részletesebben [3]-ban olvashatunk — számunkra most igazán csak az a "hintamanőver"-nek nevezett gravitációs reakció a fontos, mellyel el kívánják érni, hogy a Galileo orbiter egysége a Jupiter körüli keringése során minél nagyobb részét vizsgálhassa át a légkörnek és magnetoszférának.

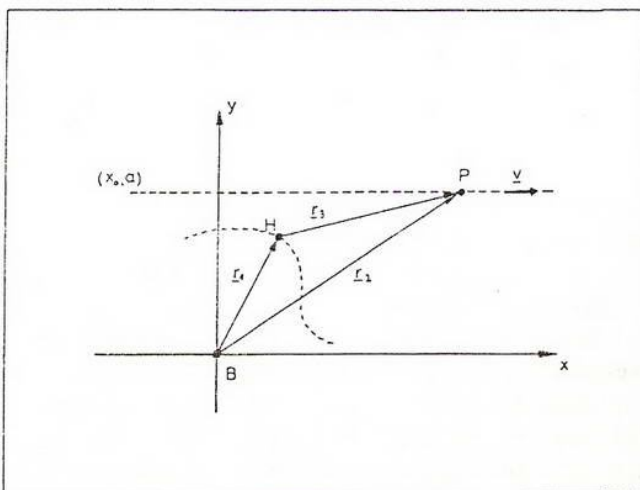
Először a Galileo orbitert lefékezik a Jupiter Io nevű holdjának gravitációs hatásával, aminek hatására az egyébként a megközelítés helyére vonatkozó szökési sebességnél nagyobb sebességű szonda nem távolodik el hiperbola pályán, hanem a Jupiter körüli ellipszis pályára lép, s ott minegy 2 esztendeig kering. De nem ugyanazon az ellipszisen, mert különben nem kaphatnánk a légkör és magnetoszféra nagy területeiről képet. Ahhoz, hogy a szonda jelentős területet átvizsgálhasson, pályáját többször is módosítani kell. Az ehhez szükséges energia túlnyomó részét az Európa, Ganümedes és Callisto nevű Jupiterholdakkal való gravitációs reakció szolgáltatja a Jupiter gravitációs terében. Ezen holdak perturbatív hatása teszi lehetővé, hogy megváltozzanak az ellipszis-pálya paraméterei, azaz a nagytengelye hossza és iránya. Megfelelően szinkronizálva a hajtómű működtetését a holdak helyzetével, elérhető, hogy egyrészt radiális irányban (azaz a nagytengelye hosszának módosításával) másrészt meridiális irányban (azaz a nagytengely irányának változtatásával) egyaránt nagy területeit lehessen átvizsgálni a légkörnek és a magnetoszférának. Lássuk ezek után a Galileo- és az ICE-szonda gravitációs reakciójának egyszerű modelljét.

4. A gravitációs reakciók alapmodellje

A redukált háromtest-problémából indulunk ki, tehát adott két, egymástól lényegesen nem különböző gravitáló tömeg, s ezek gravitációs terében vizsgálunk egy pontszerű, azaz elhanyagolható tömegű próbatesztet. Kezdeti feltételként vegyük azt az esetet, hogy a B bolygó, mint anyaobjektum körül kering b sugarú körpályán a H hold, mint pontszerű leányobjektum. Ezt a Kepler-rendszert zavarja meg egy külső P perturbáló objektum, melynek tömege a B tömegéhez mérhető. A gravitációs reakciók alapmodelljében eltekintünk a két nagy tömegű objektum egymásra hatásától, csakis a pontszerű H holdra kifejtett erőket vesszük figyelembe, csakis annak mozgása érdekel bennünket. Ezért úgy vesszük, hogy a P perturbáló tömeg állandó v sebességgel elrepül a B mellett adott a ütközési paraméterrel. Ez az alapmodell jól képviseli mindazon eseteket, mikor a P perturbáló objektum nagy sebességgel repül el a rendszer mellett, azaz amikor a kölcsönhatási idő sokkal kisebb, mint a H hold keringési ideje. Ilyen esetekben a kölcsönhatás rövid idejére elhanyagolható mértékben mozdulnának el a nagy tömegű objektumok megfelelően nagy ütközési paraméter esetén. Ha modellünkbe beépítenénk a B és P objektumok egymásra hatását is, elbonyolódna a helyzet, ugyanakkor ezzel lényegi változást, egészen új hold-pálya-konfigurációt nem kapnánk.

(Következő cikkünkben egy olyan modellt fogunk tárgyalni, melynél már figyelembe kell venni a két nagy tömegű égitest kölcsönhatását.)

Vizsgálódjunk két-dimenzióban, tehát a P perturbáló égitest pályája essen a H hold keringési síkjába. Koordinátarendszerünket vegyük fel az 1. ábra szerinti módon. Az M_1 tömegű B anyabolygó legyen az origóhoz rögzítve, az m tömegű H hold helyvektora legyen r_1 , a P perturbáló égitest helyvektora r_2 , a H és P közti helyvektor r_3 , az M_2 tömegű perturbáló objektum mozogjon v állandó sebességgel az x tengelytől a távolságra, azzal párhuzamosan húzódó egyenes mentén.



1. ábra

Felírva a H holdra a Newton-egyenletet:

$$m \cdot \ddot{r}_1 = - \frac{\gamma m M_1}{r_1^3} r_1 + \frac{\gamma m M_2}{r_3^3} r_3, \quad (1)$$

ahol γ a gravitációs állandó.

Az 1. ábrán láthatóan:

$$r_2 = r_1 + r_3. \quad (2)$$

Descartes-koordinátákkal:

$$r_1 = (x, y) \quad r_2 = (x_0 + vt, a) \quad r_3 = (x_0 + vt - x, a - y). \quad (3)$$

(1), (2) és (3) felhasználásával kapjuk a H hold gyorsulásának komponenseit:

$$a_x = - \gamma M_1 \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \gamma M_2 \frac{x_0 + vt - x}{[(x_0 + vt - x)^2 + (a - y)^2]^{3/2}}. \quad (4)$$

$$a_y = - \gamma M_1 \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \gamma M_2 \frac{a - y}{[(x_0 + vt - x)^2 + (a - y)^2]^{3/2}}. \quad (5)$$

Az eredményül kapott (4) és (5) egyenleteket csak numerikusan tudjuk megoldani általános esetben, ezért személyi számítógéphez folyamodunk. A (4), (5) egyenleteket a következő iterációs eljárással oldjuk meg: az időt felosztjuk elemi dt intervallumokra, s úgy tekintjük, hogy egy ilyen elemi dt időintervallumban a H hold egyenletesen gyorsuló mozgást végez, azaz gyorsulása állandó nagyságú. Ily módon az i -edik intervallumra vonatkozó gyorsulással, sebességgel és koordinátákkal a következő rekurzív módon lehet kifejezni az $i+1$ -edik intervallum végén elért sebességeket, koordinátákat:

$$v_x^{(i+1)} = v_x^{(i)} + a_x^{(i)} \cdot dt,$$

$$v_y^{(i+1)} = v_y^{(i)} + a_y^{(i)} \cdot dt,$$

$$x_{i+1} = x_i + [v_x^{(i)} + v_x^{(i+1)}] \cdot dt/2 + a_x^{(i)} \cdot (dt)^2/2,$$

$$y_{i+1} = y_i + [v_y^{(i)} + v_y^{(i+1)}] \cdot dt/2 + a_y^{(i)} \cdot (dt)^2/2. \quad (6)$$

Az intervallum végén az azon koordinátákhoz tartozó gyorsulás komponenseit vesszük. A (6) rekurzív iteráció alapján egyszerű programot írhatunk, mely minden egyes ciklus végén a koordináta-, sebesség-, gyorsulás-változók helyére az újonnan kiszámított értékeket helyettesíti, s kezdi előlről a számításokat.

A receptet tehát megadtuk, ez alapján könnyen írhat bárki egy egyszerű programot, mely a (6) szerinti iterációt végzi el, s ezzel lényegében az (1) Newton-egyenletet oldja meg. Mi most nem közöljük

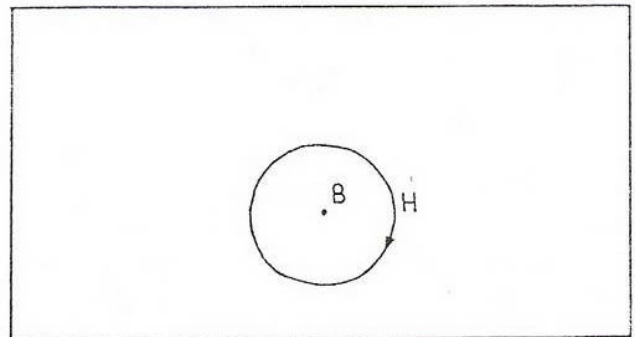
a program listáját, inkább részletesen szólnánk a futtatási eredményekről.

A következő numerikus értékeket vettük számításhoz:

$$M_1 = M_2 = 10^{24} \text{ kg}, \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}, \\ b = 5 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

A P perturbáló objektum kezdő abszcisszája (x_0), a H hold x tengellyel bezárt szöge (ϕ), az ütközési paraméter és a hold kezdeti keringési sugarának hányadosa (k), a perturbáló égitest (v) sebessége és a (dt) időfelbontás változni fog.

Első lépés annak kikísérletezése, hogy melyik az az x_0 kezdő abszcissza, mely nem túl nagy ahhoz, hogy jelentősen megnövelje a program futási idejét, de nem is túl kicsi ahhoz, hogy már jelentős perturbációs hatást okozhasson. Ha túl messziről indítanánk P-t, akkor sokáig szinte semmi változás nem lenne tapasztalható a H hold keringésében, azaz csak fölöslegesen megnövelnénk a gépidőt. Ha pedig túl kicsire választanánk x_0 -t, akkor pedig nem jól modellezhetnénk egy távolról közeledő, s a rendszer mellett elsuhanó perturbáló égitest hatását. Mi az optimális x_0 kezdő abszcisszát a szóbanforgó numerikus adatok mellett $x_0 = 4 \cdot 10^9$ m-nek találtuk. A 2. ábrán látható, hogy ha ennél az értéknél távolabb rögzítjük a perturbáló objektumot, akkor a hold egy keringése alatt szinte semmi perturbációt nem okoz a körpályában.



2. ábra

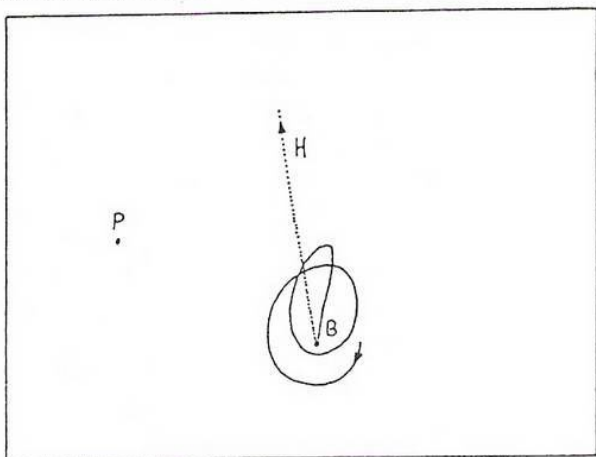
$$x_0 = -6 \cdot 10^9 \text{ m}, \quad v = 0 \text{ ms}^{-1}, \quad \phi = 0, \quad k = 2, \quad \delta t = 43200 \text{ s}$$

Érdekes még a statikus esetnél maradnunk, a 3. ábrán azt az esetet láthatjuk, mikor közelebb rögzítettük a P-t a rendszerhez. Ekkor néhány keringés után a hold oly nagy sebességre gyorsul — jelentősen megközelítve az anyabolygót —, hogy megszökik a rendszerből. Ha még közelebb rögzítjük P-t az anyabolygóhoz, akkor a 4. ábrán látható kettős hurkokból álló pályára áll a hold. Ezen utóbbi eset jó modellül szolgálhat a kettős csillagok bolygóinak mozgására attól eltekintve, hogy most P és B nem kering egymás körül.

Ezek után nézzük a dinamikus eseteket, azaz amikor P mozog. Az 5. ábrán azt az esetet láthatjuk, amikor a perturbáló objektum nagy sebességgel elsu-

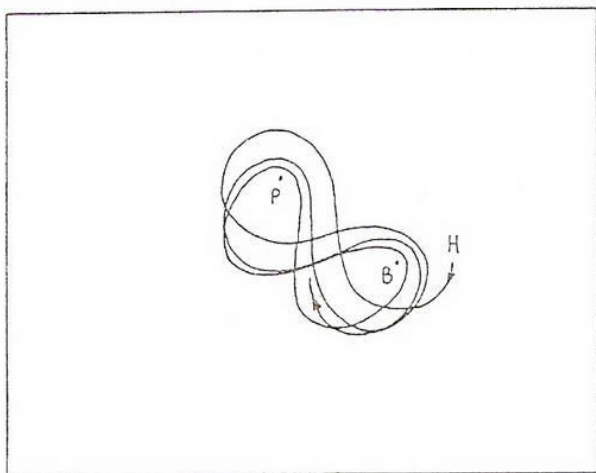
han a rendszer mellett, közben kissé meglóditja a holdat, minek hatására az letér eredeti körpályájáról és ellipszispályára áll tovább keringve B körül P eltávoztása után.

Ha csökkentjük P sebességét ugyanazon paraméterek mellett, akkor már egészen más lesz a gravitációs reakció végeredménye, ugyanis a 6. ábrán látható módon a hold megszökik a rendszerből. A P perturbáló égitest olyan fázisban közelítette meg a H holdat, hogy az elkezdett feléje gyorsulni, s átlépte ennek hatására a szökési sebességet.



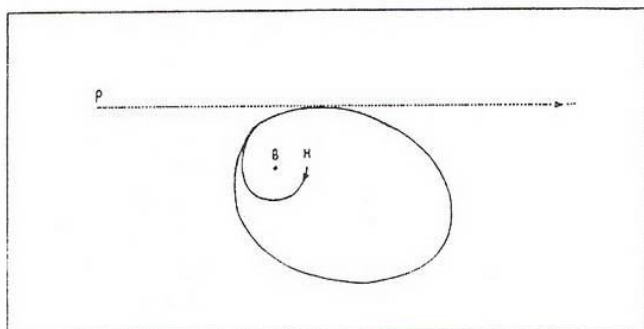
3. ábra

$$x_0 = -2 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 0 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 43200 \text{ s}$$



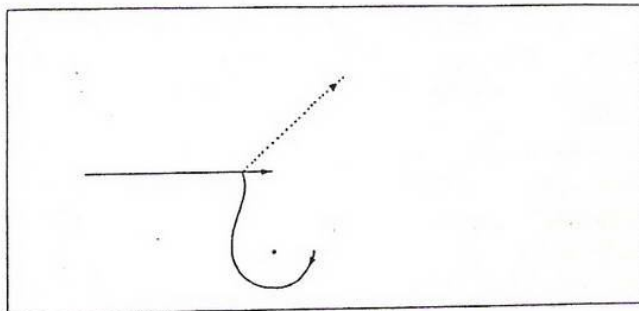
4. ábra

$$x_0 = -10^9 \text{ m}, v = 0 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 1,5, dt = 43200 \text{ s}$$



5. ábra

$$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 1000 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 43200 \text{ s}$$

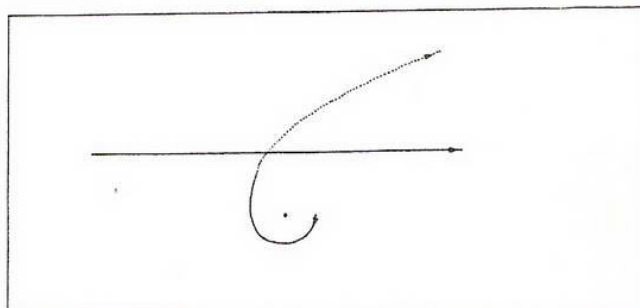


6. ábra

$$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 549 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 43200 \text{ s}$$

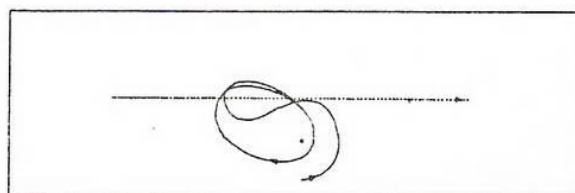
A számítógép képernyőjén természetesen nem folytonosan jelennek meg a pályák, hanem diszkrét pontok formájában, melyek annál sűrűbben követik egymást minél kisebb az égitestek sebessége rögzített dt időfelbontás mellett. Ily módon a pontok egymástól való távolságából utólag is következtetni tudunk a sebességekre. Látható, hogy ahol a H hold megszökik ott nagy a sebessége, hiszen ritkábban követik egymást a pályapontok. A 6. ábrán túl nagy sebességű a megszökő hold ahhoz, hogy érzékelhetnénk a szökésre jellemző hiperbola (vagy speciális esetben parabola) ívét. Ha azonban kissé módosítjuk P sebességét, akkor a 7. ábrán már jól kivehető, hogy a megszökő H hold hiperbolapályán hagyja el a rendszert.

A kezdő paraméterek megfelelő beállításával akár meg is fordíthatjuk a hold keringési irányát, amint ezt a 8. ábrán láthatjuk.



7. ábra

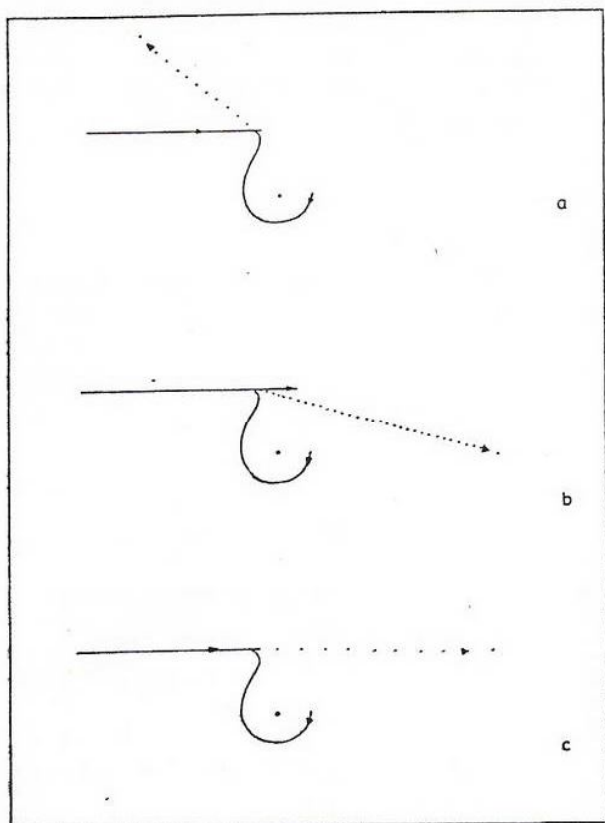
$$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 650 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 43200 \text{ s}$$



8. ábra

$$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 600 \text{ ms}^{-1}, \phi = -\pi/2, k = 1, dt = 43200 \text{ s}$$

Fontos megemlíteni, hogy a (6) rekurziós iterációs differenciálegyenlet megoldó módszer hátránya, hogy integrálja a hibákat. Tökéletesen pontos csak $dt \rightarrow 0$ esetben lehetne, de nyilván mi csak véges dt időfelbontást alkalmazhatunk, ami viszont egyre nagyobb hibát okoz az idő növekedésével. Éppen ezért ki kell kísérletezni azt az optimális dt időfelbontást, mely nem túl kicsi ahhoz, hogy jelentősen megnövelje a program futási idejét, ugyanakkor nem is túl nagy ahhoz, hogy jelentős hibát okozzon. Ezen optimális dt meghatározása történhet pl. úgy, hogy ugyanazon kezdő paraméterek mellett, de különböző dt időfelbontásokra lefuttatjuk a programot, s vizsgáljuk a végeredményeket. Erre látunk példát a 9. ábrán, ahol is egyre kisebb dt időfelbontást vettünk. Látható, hogy mindhárom esetben a gravitációs reakció végeredménye szökés, de egészen különböző szökési irányokkal és sebességekkel. Az is látható, hogy a b és c ábra közti különbség nem olyan nagy, mint az a és b közti. Ha még jobban csökkentenénk dt -t, akkor gyakorlatilag nem kapnánk jelentősen eltérő végeredményt a c ábrától, így az mondható, hogy a c ábra dt időfelbontásánál nem érdemes kisebbet venni, mert azzal csak a gépidőt növelnénk meg minden további haszon nélkül.



9. ábra

$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}$, $v = 500 \text{ ms}^{-1}$, $\phi = 0$, $k = 2$
a) $dt = 86400 \text{ s}$
b) $dt = 43200 \text{ s}$
c) $dt = 21600 \text{ s}$

Az eddigieket összefoglalva a következőt mondhatjuk: egyszerű modellünkkel a gravitációs reakciók két fő lehetséges kimenetét sikerült szimulálni a számítógépen, egyrészt azt az esetet, mikor csak kisebb perturbációt eredményez a perturbáló objektum rendszer melletti elrepülése, s minek hatására a hold letér körpályájáról, s ellipszispályán kering tovább az anyaobjektum körül a perturbáló objektum eltávozása után, az eredetivel megegyező vagy ellentétes keringési iránnyal. A másik fő eset, mikor a perturbáló objektumnak nagyobb hatása van a holdra, s ekkor úgy felgyorsítja azt, hogy a hold elszökik a rendszerből.

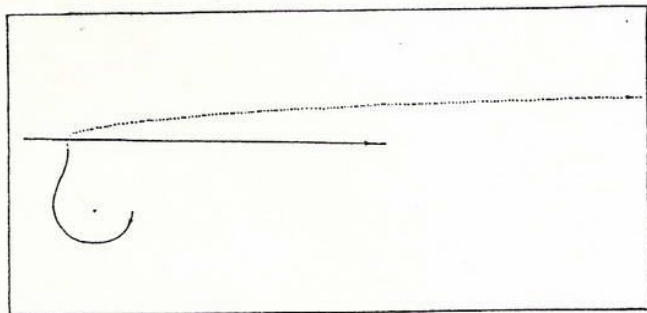
Ezen utóbbi fő esetnek van egy számunkra nagyon érdekes vonatkozása, amit akkor kapunk meg, ha kihasználjuk a mozgásegyenlet invarianciáját az időtükrözésre nézve. Ekkor ugyanis azt mondhatjuk, hogy a mozgások, a gravitációs reakció az időben visszafelé is megvalósulhat. Tehát a szóbanforgó paraméterek mellett, ha kezdőfeltételként a végparamétereket adjuk meg, akkor visszacapjuk a kezdő feltételeket. Ennek az lesz a következménye, hogy alkalmas paraméterválasztás esetén egy a végtelenből hiperbolikus (vagy parabolikus) sebességgel a B-hez közeledő objektum befogódhat, ha B mellett elröpül egy P perturbáló égitest. Ezzel pedig megkaptuk a Galileo-program ismertetésénél említett gravitációs reakció azon momentumát, amikor a nagy sebességgel a Jupiter felé közeledő, egyébként azt elhagyó Galileoszondát az Io Jupiter-hold lefékezte úgy, hogy a Jupiter végül is befoghatta. De a szökéssel végződő gravitációs reakcióinkkal lényegében az ICE-program szökési manőverét is modelleztük, csak jóval egyszerűbben.

Hátra van még egy harmadik, az előző két fő eset közötti eset, mikor a perturbáló objektum erősebb hatással van a keringő holdra, mintsem hogy az az anyaobjektum körül maradjon, de gyengébb a hatása annál, hogy a hold megszökjön. Ez az eset talán a legérdekesebb, mindenesetre ez a legérzékenyebb a paraméterek finom beállítására, behangolására. Arról van szó, mikor a perturbáló égitest befogja a holdat, s az a továbbiakban már ő körül kering, végleg elhagyván az anyaégitestet.

A 10. ábrán befogás gyanús esetet láthatunk, de ez még nem az. Kissé módosítva a perturbáló objektum sebességét a 11. ábrához jutunk. Látható, hogy itt már megtett a hold egy teljes keringést P körül, de a második periódus alatt úgy alakult a helyzet, hogy végül is hiperbolapályán megszökött. Ennek oka, hogy még túl közel volt az anyaobjektum.

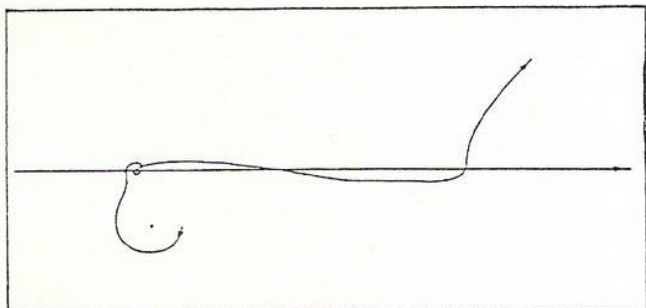
A 12. és 13. ábrákon a perturbáló objektum sebességének további finom módosítása történt, minek hatására egyre több teljes fordulatot tesz meg a hold P körül, de végül mégiscsak megszökik. Mindenesetre látható, hogy nagyon közel vagyunk a befogáshoz. És valóban, még egy kicsit módosítva a paramétereken, megkapjuk az érdekes befogási effektust a 14. ábrán látható módon. A 13. ábrából már sejteni lehetett,

hogy talán csak azért nem fogta be a perturbáló objektum a holdat, mert túl nagy volt a dt időfelbontás végsőességéből származó hiba. Ezért csökkentettük a felére dt -t a 14. ábra esetében, s meg is kaptuk a keresett effektust. Hogy tényleg befogásról van szó, arról meggyőződhetünk, ha koordinátarendszer transzformációt hajtunk végre, és a perturbáló objektumhoz rögzítjük koordinátarendszerünk origóját a 14/b ábra szerinti módon.



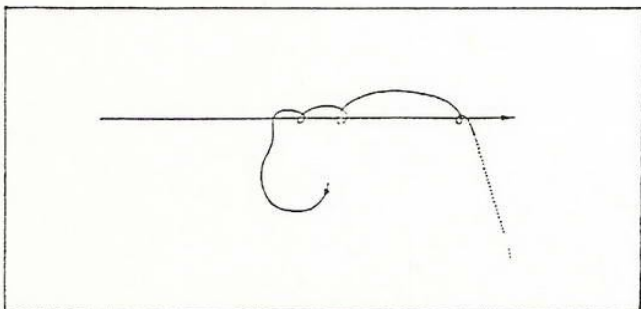
10. ábra

$$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 550 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 43200 \text{ s}$$



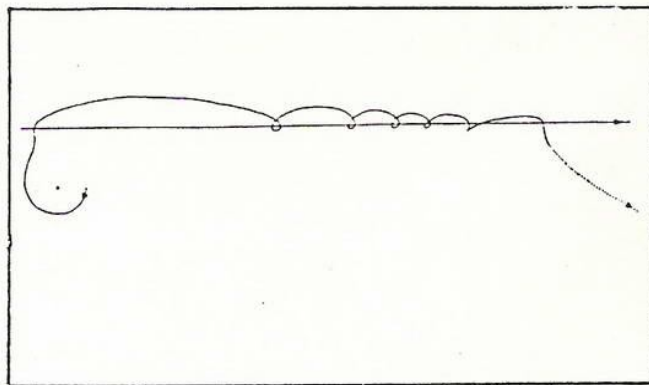
11. ábra

$$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 550 \cdot 5 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 43200 \text{ s}$$



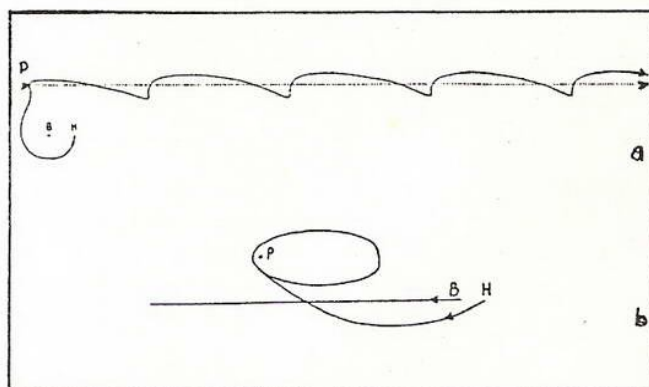
12. ábra

$$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 551 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 43200 \text{ s}$$



13. ábra

$$x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 551 \cdot 5 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 43200 \text{ s}$$



14. ábra

- a) $x_0 = -4 \cdot 10^9 \text{ m}, v = 551 \cdot 5 \text{ ms}^{-1}, \phi = 0, k = 2, dt = 21600 \text{ s}$
 b) mint az a) ábra, csak a P perturbáló objektumhoz rögzített koordinátarendszerben

Ezzel megkaptuk a főbb lehetséges gravitációs reakció végeredményeket. Láthatjuk, hogy már ezen egyszerű modellel is milyen jól szimulálhatók a valós égitestmechanikai jelenségek. Nem gondoljuk, hogy kimerítettük a témát, modellünket tovább lehet fejleszteni, figyelembe lehet venni pl. a két nagy tömegű objektum egymásra kifejtett hatását, egymás körüli keringését stb. Ilyen valóságosabb modellekkel visszakaphatjuk pl. a Lagrange-féle librációs pontokat, a Kordylewski-féle porholdakat s számos más érdekes esetet. Következő cikkünkben a kölcsönható galaxisokkal foglalkozunk, megmutatjuk, miként lehet modellezni a gyűrű- és spirálgalaxisok kialakulását.

IRODALOM

- [1] Szécsényi-Nagy Gábor: A Halley-program legfontosabb eredményei, Természet Világa, 118. évf. 3. sz. 106. o. (1987)
- [2] Kálmán Béla: Kozmikus biliárd, avagy hogyan lesz mégis amerikai üstökösszonda? Föld és Ég, XVIII. évf. 9. sz. 258. o. (1983)
- [3] Both Előd: Két év a Jupiter körül, Föld és Ég, XIX. évf. 12. sz. 368. o. (1984)

(Folytatása következik)