2.3. A ferdén repülő labda pályája és sebessége

A közegellenállási erő miatt a labda mozgásegyenletét az előzőekben csak egyszerűsítő feltételek mellett oldottuk meg. Ferdén elhajított (rúgott, ütött) labda általános mozgásegyenlete a következő:

$$\ddot{\underline{r}} = \underline{g} - kv^2 \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \tag{2.16}$$

ahol $\underline{r}$ a labda hely-, $\underline{v}$ pedig sebességvektora. A közegellenállási erő irányát a sebesség irányába mutató egységvektor szabja meg. A 2.16 egyenletet komponensekre bontva a mozgásegyenlet az

$$\ddot{x} = -k|\underline{v}|\dot{x} \tag{2.17}$$

$$\ddot{y} = -k|\underline{v}|\dot{y} + g \tag{2.18}$$

egyenletekre bomlik szét. Ez a differenciál-egyenletrendszer egzakt módon nem oldható meg. Egy személyi számítógép segítségével azonban a mozgás pályagörbéje egyszerűen megadható. Ez a mozgásegyenlet szinte iskolapéldájává vált a numerikus úton történő megoldás bemutatásának. Ezért itt csak egy egyszerű algoritmust és a C64-re írt program vázlatát közöljük.

Jelöljük egy adott időpillanatban a labda helykoordinátáit x_i és y_i-vel, sebességének komponenseit pedig v_{x_i} és v_{y_i}-vel.

Ebben a pillanatban a gyorsulás

$$a_{x_i} = -k\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \cdot v_{x_i} \tag{2.19}$$

$$a_{y_i} = g - k\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}\, v_{y_i} \tag{2.20}$$

Közelítsük a labda mozgását egy kicsiny τ időtartamban a fenti állandó gyorsulással való egyenletesen gyorsuló mozgással. Jelöljük az így elért se-

bességet $\underline{v}_{i+1} = \left(v_{x_{i+1}}, v_{y_{i+1}}\right)$-gyel a helyet pedig $\underline{r}_{i+1} = \left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$-gyel. A sebesség és helykoordináták a fenti feltevéssel a

$$v_{x_{i+1}} = v_{x_i} + a_{x_i}\tau \tag{2.21}$$

$$v_{y_{i+1}} = v_{y_i} + a_{y_i}\tau \tag{2.22}$$

illetve az

$$x_{i+1} = x_i + \frac{v_{x_i} + v_{x_{i+1}}}{2}\tau \tag{2.23}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{v_{y_i} + v_{y_{i+1}}}{2}\tau \tag{2.24}$$

egyenletből határozhatók meg.

Az eljárás egyszerűen folytatható, ha a kezdeti sebesség és helykoordináták helyére a 2.20–2.23 egyenletek alapján meghatározott $\underline{r}_{i+1}$ és $\underline{v}_{i+1}$ értékeket írjuk és a számítást megismételjük.

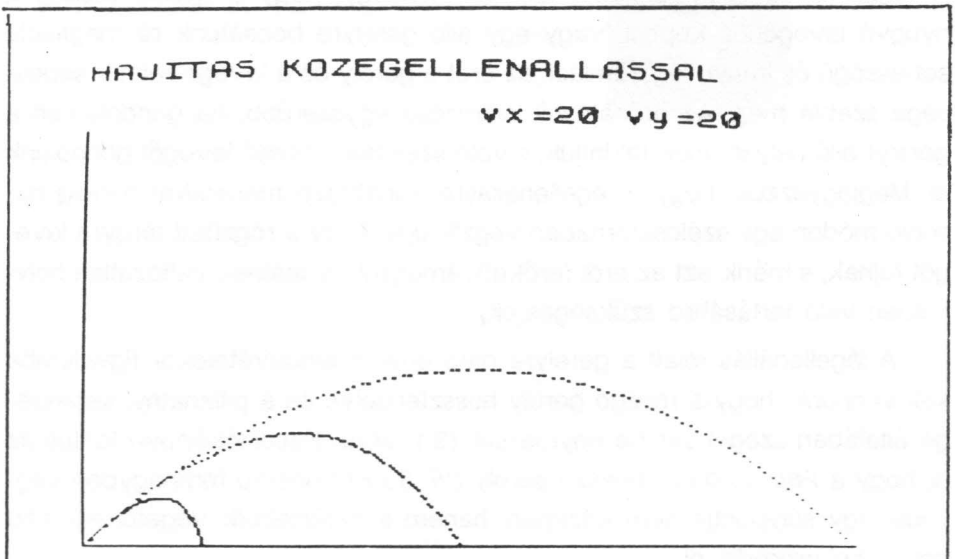
Erre a gondolatmenetre alapozva készült a következő C64 gépen futtatható program is.

```
1000   v = SQR/vx * vx + vy * vy/
1010   ax = -k * v * vx :  ay = g - k * v * vy
1020   x = x + vx * τ + ax * τ * τ/2 :  y = y + vy * τ + ay * τ * τ/2
1030   vx = vx + ax * τ :  vy = vy + ay * τ
1040   ... ábrázolás
2000   GOTO 1000
```

Az alkalmazott közelítési módszer igen egyszerű, ezért akkor várhatunk jó eredményt, ha viszonylag finom időfelbontást (kicsiny τ érték) alkalma-

zunk. Az egyenletrendszer természetesen magasabbrendű közelítésekkel (*Runge-Kutta* módszerek) pontosabban is megoldható. A középiskolai fizika órákon azonban véleményünk szerint célszerűbb a kissé pontatlanabb, de elvileg könnyen érthető módszerek alkalmazása.

A 2.6. ábrán az összehasonlítást kedvéért az ideális parabola pálya, illetve a közegellenállással fékezett ping-pong és futball labda számítógép rajzolta pályája látható.



2.6. ábra

3. Eltérés a szimmetriától, az aerodinamikai emelőerő

3.1. A gerely és diszkosz mozgásának kvalitatív magyarázata

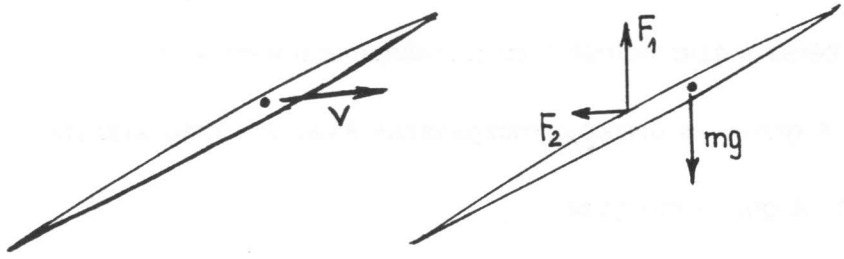
3.1.1. A gerely mozgása

A sportszerek mozgásának kísérleti vizsgálata és a mozgás elemzése legegyszerűbben filmfelvételek analizálásával végezhető el.

Filmfelvétel segítségével megállapítható volt, hogy egy gerelyhajító *53 m*-es dobását *42°*-os kezdőszög alatt *26 m/s* kezdősebességgel indította. Ha itt is úgy számolunk, mint a súlylökésben, az ilyen kezdőfeltételekkel elhajított gerelynek legalább *70 m* körül kellett volna földet érnie. A valóságos adat *(53 m)* és a számított érték eltérése bizonyítja, hogy a könnyű (mintegy *0,8 kg*) gerely mozgására a légellenállás erősen hat.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen erővel hat a levegő az elhajított gerelyre! A légellenállás szempontjából teljesen mindegy, hogy a gerely mozog a nyugvó levegőhöz képest, vagy egy álló gerelyre bocsátunk rá megfelelő sebességű és irányú légáramlást: az erőt a gerely és a levegő relatív sebessége szabja meg. Az erőhatások elemzése egyszerűbb, ha gondolatban a gerelyt álló helyzetűnek tekintjük, s vele szemben áramló levegőt gondolunk el. Megjegyezzük, hogy a légellenállásra vonatkozó méréseket mindig hasonló módon egy szélcsatornában végzik úgy, hogy a rögzített tárgyra levegőt fújnak, s mérik azt az erőt (erőket), amely(ek) a testnek változatlan helyzetben való tartásához szükséges(ek).

A légellenállás miatt a gerelyre ható erők számbavételekor figyelembe kell vennünk, hogy a mozgó gerely hossztengelye és a pillanatnyi sebessége általában szöget zár be egymással. (3.1. ábra) Hasonlóképpen fontos az is, hogy a *260–270 cm* hosszú gerely *25–33 cm* hosszú fémhegyben végződik, így súlypontja nem középen, hanem a nehezebbik végétől *90–110 cm*-re helyezkedik el.



3. 1. ábra

A gerellyel szemben áramló levegő a sportszert egyrészt hátrafelé nyomja *(F_2)*, másrészt emeli is *(F_1)*. Az emelőerő legnagyobbrészt abból származik, hogy a gerely mögött az áramlás örvényessé válik. Mivel a levegő a gerely hegyénél nagyobb irányváltozást szenved, mint a végén, az örvényképződés a gerely első felén erőteljesebb, mint a hátsón. Ezért a levegő által ható erőnek a támadáspontja a gerely felénél följebb, de a gerely súlypontja alatt van. A légellenállás igen összetetten hat a gerely mozgására. Az F_2 erő lassítja a gerelyt, azaz a hajítás távolságát egyértelműen csökkenti. Az F_1 erőösszetevő ellenben növeli a hajítás távolságát. F_1 hatására ugyanis a Föld felé haladva csökken a gerely zuhanási sebessége, nő a repülés ideje, s ezáltal növekedik a hajítás távolsága. (Bonyolítja a helyzetet, hogy a légellenállási erő mozgás közben a gerely helyzetét is változtatja. Mivel a légellenállásból származó erő támadáspontja a súlypont alatt van, az F erő repülés közben a gerelyt a sebesség irányába forgatja. Ezzel csökken a sportszernek az áramlás irányára merőleges felülete és ilyen módon a közegellenállási erő is.)

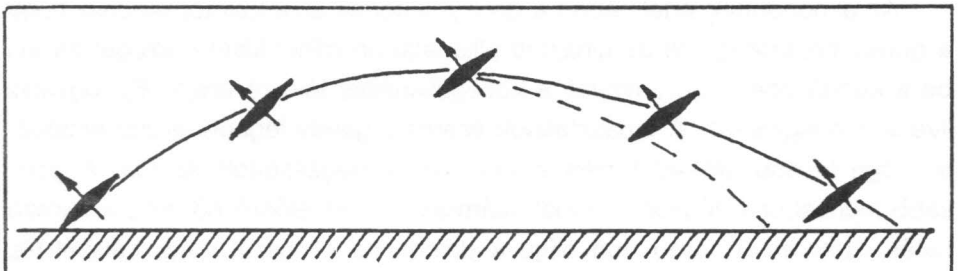
Az elmondottak értelmében a gerelyhajítónak arra kell törekednie, hogy a gerely hossztengelye az elhajítás pillanatában minél kisebb szöget zárjon be a kezdősebesség irányával, a közegellenállás fékező ereje *(F_2)* ugyanis ilyenkor a legkisebb. A tapasztalatok szerint a gerely legcélszerűbb elhajítási szöge kisebb *(35–40°)*, mint a súlylökésre megállapított *42 fok*. A laposabb indításkor a légellenállásból származó F_1 emelőerő nő, míg a fékező hatás csökken. Tovább bonyolítja a dolgot, ha ellenszél vagy hátszél fúj. (Vannak gerelyhajítók, akik például ellenszélben nagyobbat tudnak dobni, mint szélcsendben.)

A közegellenállásról elmondottak világosan érzékeltetik, hogy gerelyhajításnál a súlylökéssel ellentétben szó sem lehet a mozgásnak olyan pontos leírásáról, hogy azzal a dobási távolságok is kiszámíthatók legyenek. A fizikai törvények itt jobbára „csak" arra alkalmasak, hogy segítségükkel a gerelyhajítás tapasztalati szabályait értelmezzük.

3.1.2 A diszkosz mozgása

Diszkoszvető atléták tapasztalatai szerint a diszkosz ellenszélben messzebbre hajítható, mint szélcsendben. Ez a tapasztalat az első pillanatban meglepőnek tűnhet, hiszen a *2 kg* tömegű, *22 cm* átmérőjű, lencse alakú diszkoszon - viszonylag nagy átmérője miatt - nem csekély légellenállási erő ébred. Ezt az erőt az ellenszél csak növeli.

A diszkosz mozgását valójában ugyanolyan hatások szabják meg, mint a gerelyét. A nehézségi erőn kívül a légellenállás fékezi és egyúttal emeli is az elhajított diszkoszt. A gerelyhez képest azonban itt egy újabb hatás is érvényesül. A diszkoszvetők az elhajítás pillanatában oldalsó irányban megpörgetik a szert! A forgás következtében a diszkosz síkja a mozgás során gyakorlatilag nem változik, s bár a légellenállásból származó erő a diszkosz mozgását fékezi, a repülési idő annyira megnő, hogy a szer sokkal messzebb ér földet, mintha egy ideális hajítás parabolapályáján mozgott volna. (3.2. ábra)



3. 2. ábra

A gyors forgás a diszkosz síkját állandósítja, megakadályozva, hogy a légellenállás e síkot a sebességre merőleges irányba fordítsa. A diszkosz tengelye ugyanis csekély mértékben a légellenállási erő irányára merőlegesen fordul el. E jelenség megértésére végezzünk két egyszerű kísérletet! Ejtsünk le egy ferde helyzetben tartott levelezőlapot: a lap bucskázva mozog lefelé, s esés közben esetleg át is fordul. A kalimpáló mozgás annak a kö-

vetkezménye, hogy a súlypont felett támadó légellenállási erő a lapot a súlypontja körül elforgatja.

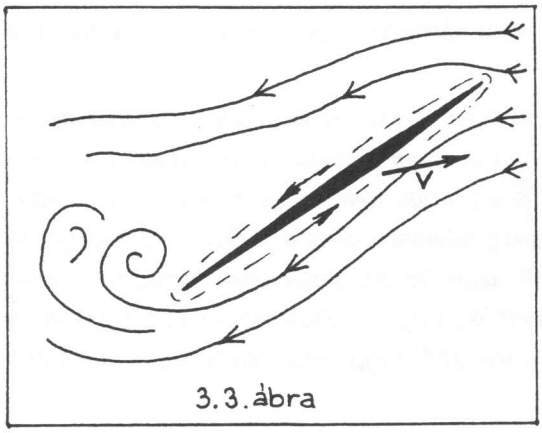
Kör alakú karton söröskorsó-alátétet hajítsunk el oldalsó irányban megpörgetve. Esés közben a karton síkja függőlegessé válik, azaz a korong síkja oldalra fordul. A korong tehát a pörgés miatt az erőhatásra merőlegesen fordul el. A mozgás dinamikailag teljesen azonos a diszkosz mozgásával. A diszkosz nagy tömege miatt azonban az oldalirányú elmozdulás igen csekély. Földetéréskor azt észlelhetjük, hogy a diszkosz mindig ugyanarra az oldalára fordulva ér talajt. (Az irány attól függ, hogy jobb- vagy balkezes versenyző dobta-e el a szert.)

A célszerűen indított diszkosz síkja eldobáskor majdnem pontosan a sebesség irányával párhuzamos. (Pontosabb mérések szerint a sebesség irányához képest mintegy *10 fokos* szögben lefelé kell dőlnie.) A gyors forgás miatt a repülés során a diszkosz síkja tulajdonképpen önmagával párhuzamosan tolódik el. Így a pálya leszálló ágán a diszkosz síkja már fölfelé tér el a sebesség irányától. Emiatt a szerre emelőerő hat, s ez növeli a repülési időt és ezzel a dobás távolságát.

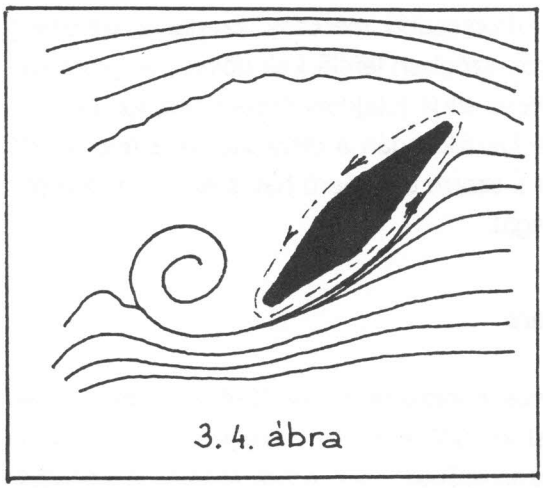
3.2. Az aerodinamikai emelő erő

A gerely és a diszkosz mozgásának pontosabb megértéséhez kissé részletesebben kell foglalkoznunk azzal az erővel amit a levegő a mozgó sportszerekre kifejt. Az eddigiekben ezen erőnek csak egyik fajtáját, a közegellenállást vettük figyelembe. A gerely és a diszkosz mozgását azonban lényegesen módosítja az ún. aerodinamikai emelőerő is. Ez az erő lényegében azért lép fel, mert a labdákkal ellentétben a gerely és a diszkosz általában nem szimmetrikus a sebesség irányára.

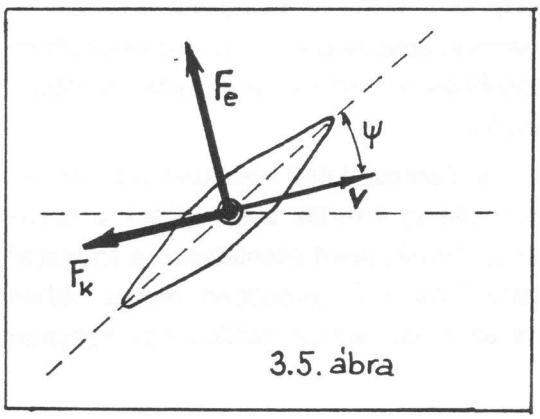
A 3.3. és 3.4. ábrák a gerely és a diszkosz körül kialakuló áramlás sematikus képét mutatják. Az áramvonalakon a nyilak a levegőnek a sportszerhez képest vett relatív sebességét jelölik, ezért ellentétesek a sportszer sebességvektorával. A tapasztalatok szerint a levegőben mozgó, élben vagy hegyben végződő tárgyakról az ábrán látható módon egy irányban forgó örvények válnak le.



3.3. ábra



3.4. ábra



3.5. ábra

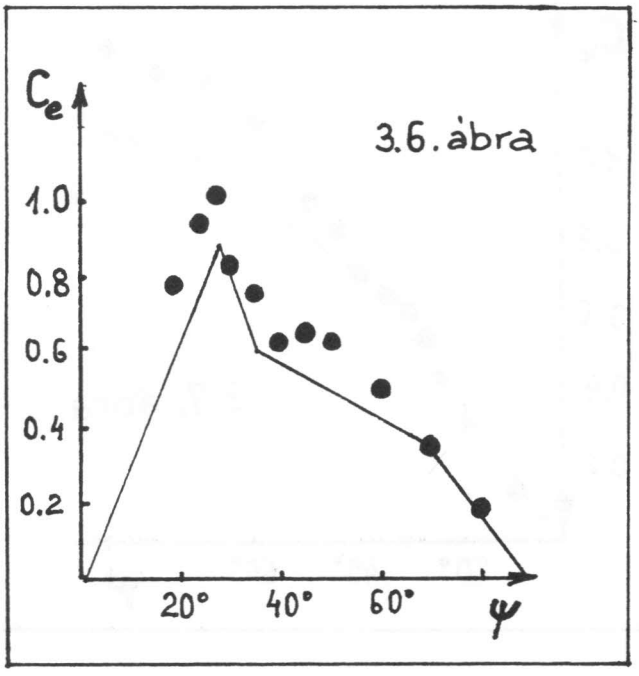
Az impulzusmomentum megmaradás törvényének értelmében az örvények által hordozott impulzusmomentumot egy ellentétes irányban forgó áramlásnak kell kompenzálnia. Ez az ellentétes irányú áramlás a mozgó tárgyat körüláramló cirkulációs mozgás formájában jelentkezik. Ezt szemléltetik az ábrákon a szaggatott vonalakkal berajzolt görbék. Az eredeti áramlás és az erre rakódó cirkulációs mozgás eredményeként a testek felett a levegő relatív sebessége megnő, alatta pedig lecsökken. A *Bernoulli* törvény értelmében ez azt jelenti, hogy a test felett a nyomás csökken, alatta pedig nő, s emiatt a testre, sebességének irányára merőleges emelőerő lép fel. Ugyanakkor természetesen továbbra is hat a testre a közeg és a test relatív sebességével ellentétes irányú közegellenállási erő. Általában tehát a közegtől a testre gyakorolt erő pl. a

diszkosz esetén a 3.5. ábrán látható módon bontható két összetevőre, ahol F_k a közegellenállási, F_e pedig az aerodinamikai emelőerő.

Az F_e emelőerő a közegellenállási erőhöz hasonlóan igen sok tényező függvénye. Általában ezt az erőt a közegellenálláshoz hasonlóan az

$$F_e = \frac{1}{2} C_e \rho A v^2 \tag{3.1}$$

alakban szokás megadni, ahol v a test és a közeg relatív sebessége, ρ a közeg sűrűsége, A a test legnagyobb keresztmetszete, a C_e dimenzió nélküli szám pedig az emelőerő tényező. Ez a tényező elsősorban a test alakjától, illetve a relatív áramlási sebességhez képest vett elhelyezkedésétől függ. Kismértékben függhet azonban a sebességtől, illetve a *Reynolds* számtól is. C_e értéke általában csak kísérleti úton határozható meg. A 3.6. ábrán a diszkoszra ható emelőerő C_e tényezőjének értéke látható a diszkosz síkja és a relatív szélsebesség által bezárt ε szög függvényében. Az ábrán körrel

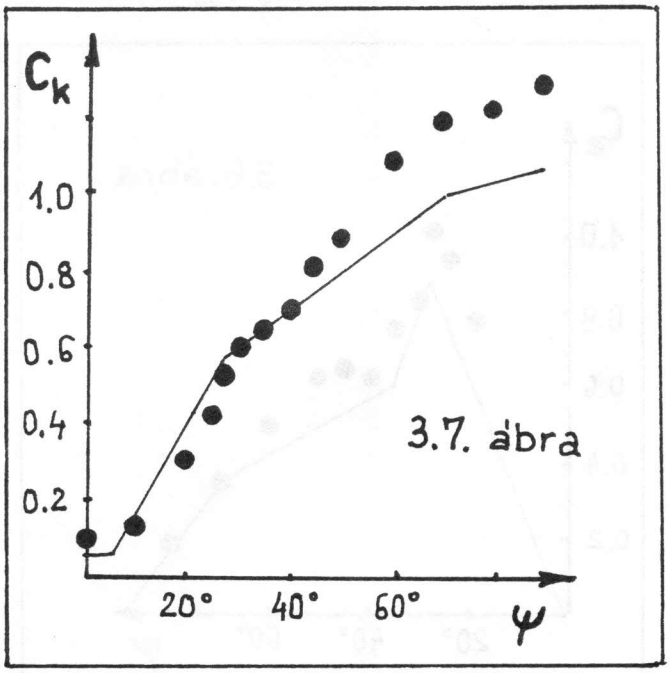


a *24,4* m/s-os relatív sebesség mellett mért adatokat jelöltük *(J. G. Hay, The Biomechanics of Sports Techniques).* A kihúzott és szaggatott vonal pedig félempírikus becslések eredményeit mutatja *(C. Fröhlich, ill. V. N. Tutevich).* A szélcsatornában végzett mérések jól alátámasztják, hogy az emelőerőben *30°* körül bekövetkező hirtelen csökkenés a diszkosz mögötti térben fellépő turbulencia következménye.

Az emelőerő mellett érdemes röviden az

$$F_k = C_k A \frac{1}{2} \rho v^2 \tag{3.2}$$

alakban felvett közegellenállási erő C_K tényezőjével is foglalkozni. A kísérleti adatok szerint diszkosz esetén ez az állandó a Ψ szöggel a 3.7. ábrán látható módon változik. (Az ábra jelölései megegyeznek a 3.6. ábra jelöléseivel.)



3.7. ábra

A 3.7. ábra mutatja, hogy a közegellenállási erő gyakorlatilag zérus, ha a diszkosz síkja párhuzamos a sebesség irányával és maximális, ha a sík merőleges a sebességre.

A két ábra összevetéséből bizonyára felvetődik, hogy a közegellenállási tényező durván egy negyed, az emelőerő állandója pedig egy fél szinuszhullámmal közelíthető. Ekkor a diszkoszra ható emelőerő, illetve közegellenállási erő változását gyakorlatilag a diszkoszfelület sebesség irányára eső, illetve arra merőleges vetületének változása okozná. Alaposabb fizikai meggondolásokkal ezt a kézenfekvő feltevést finomíthatjuk. Ha nem is ez a feltevés, de nagyjából hasonló eredmény vezethető le.

Tegyük fel, hogy a diszkoszra ható erőt a diszkosz síkjának ütköző és onnan rugalmasan elpattanó levegőmolekulák okozzák. A vitorlázás fizikájánál (ll. 1.1.) részletesen tárgyalásra kerülő modell szerint ekkor az erőnek a sebesség irányába eső összetevője, a közegellenállás

$$F_k = 2A\,\rho\,v^2 \sin^3\Psi, \tag{3.3}$$

a sebességre merőleges emelőerő pedig

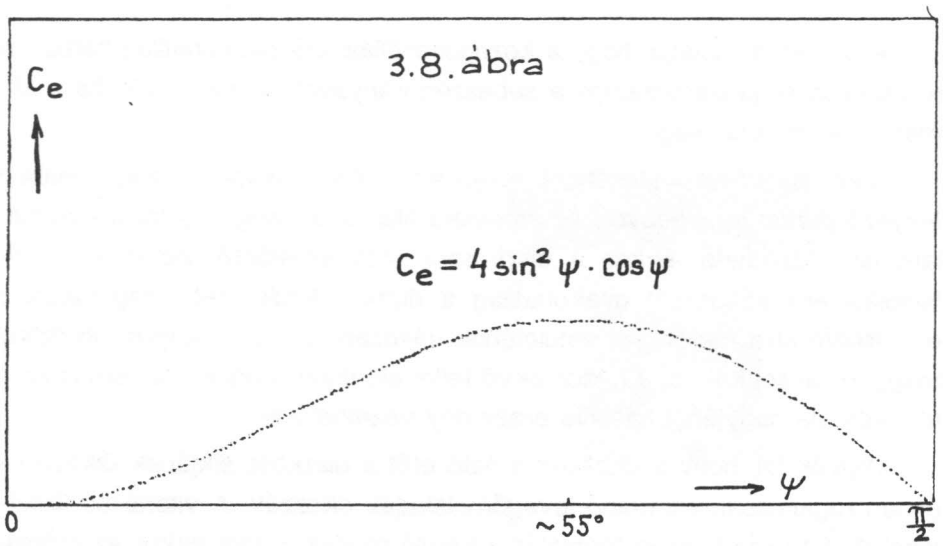
$$F_e = 2A\,\rho\,v^2 \sin^2\Psi \cos\Psi \tag{3.4}$$

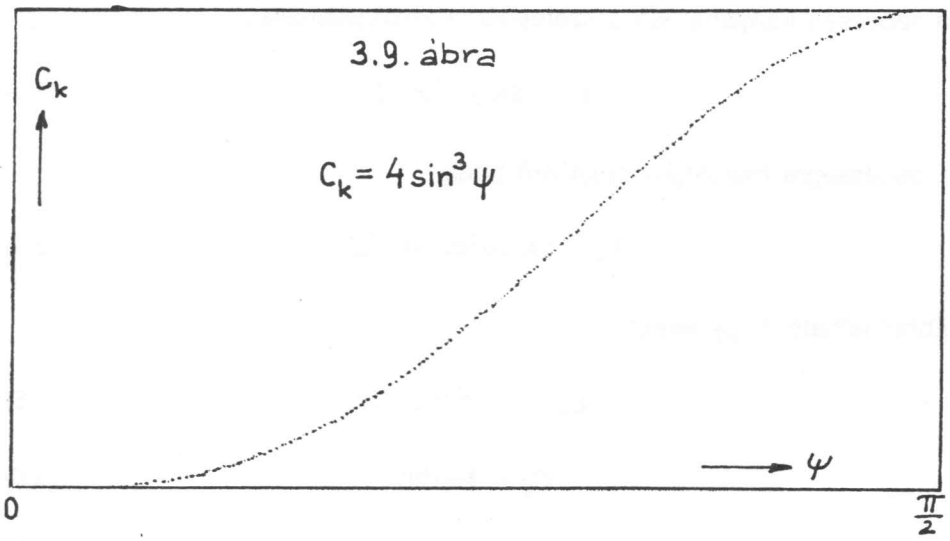
Ebből látható, hogy ekkor

$$C_e \sim 4\sin^2\Psi \cos\Psi \tag{3.5}$$

$$C_k \sim 4\sin^3\Psi \tag{3.6}$$

A két függvény menete hasonló a mérési eredményekből kapott függvényekhez, a C_e tényező maximumhelye azonban $\Psi_m \approx 55°$-ra tolódik. (3.8. és 3.9. ábra) Az eltérés jól mutatja, hogy az egyszerű ütközéses modell pontosabb számításokhoz nem használható, mert az örvényképződéssel kapcsolatos jellegzetes aerodinamikai hatásokat nem írja le.





3.3. A diszkosz pályája

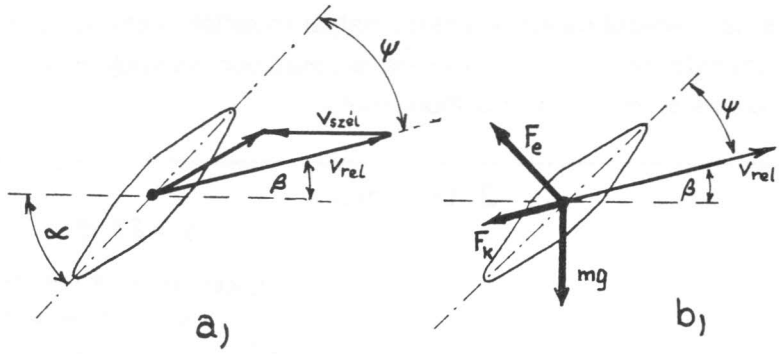
Térjünk vissza most a diszkosz mozgásának leírásához! Vegyük figyelembe az emelőerőt és a szélsebességet, de zárjuk ki az oldalszél lehetőségét. Tegyük fel továbbá, hogy a mozgás során a pörgés stabilizálja a szer síkját,

így a diszkosz bucskázás nélkül repül. A pörgés egyéb hatásaitól azonban tekintsünk el. A 3.10/a. ábra az ellenszélben repülő diszkosz sebességviszonyait, a 3.10/b. ábra pedig a fellépő erőket mutatja. Az ábrák jelöléseivel a diszkosz mozgásegyenlete az

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}\left(\rho A \frac{v_{rel}^2}{M}\right)\left(C_k \cos\beta + C_e \sin\beta\right) \tag{3.7}$$

$$\ddot{y} = -g + \frac{1}{2}\left(\rho A \frac{v_{rel}^2}{M}\right)\left(C_e \cos\beta - C_k \sin\beta\right) \tag{3.8}$$

alakban írható fel.



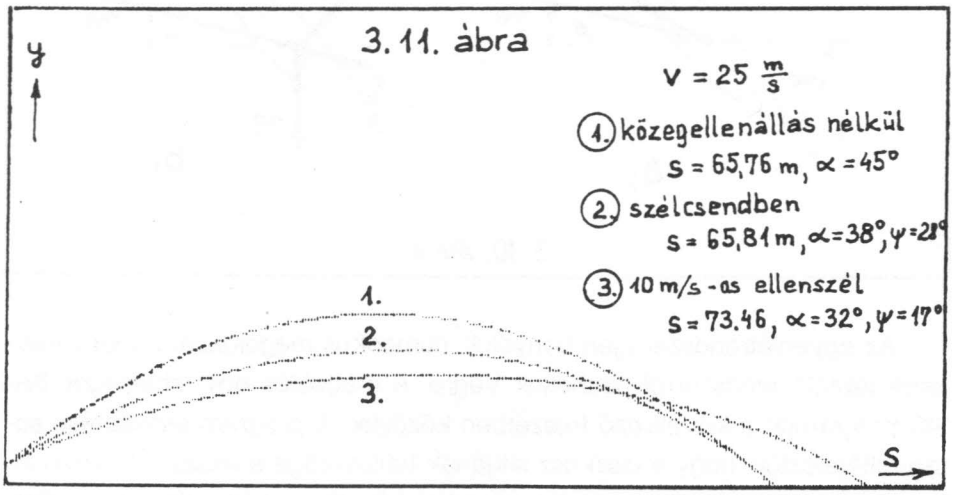
3.10. ábra

Az egyenletrendszer igen bonyolult, numerikus megoldását a már ismertetett léptető módszerrel hajthatjuk végre. A megoldás egy lehetséges BASIC programját a következő fejezetben közöljük. A program elkészítése során feltételeztük, hogy a diszkosz síkjának hajlásszöge a mozgás közben állandó. Ez a feltevés a tapasztalat szerint jó közelítéssel teljesül, mert a diszkosz gyors pörgése a sportszer síkját stabilizálja. (Erre a hatásra, továbbá a diszkosz síkjának csekély elfordulására a 3.1.2. pontban még visszatérünk.)

A C_e és C_k paraméterekként a 3.6. és 3.7. ábrákon kihúzott vonallal megadott értékeket fogadtuk el.

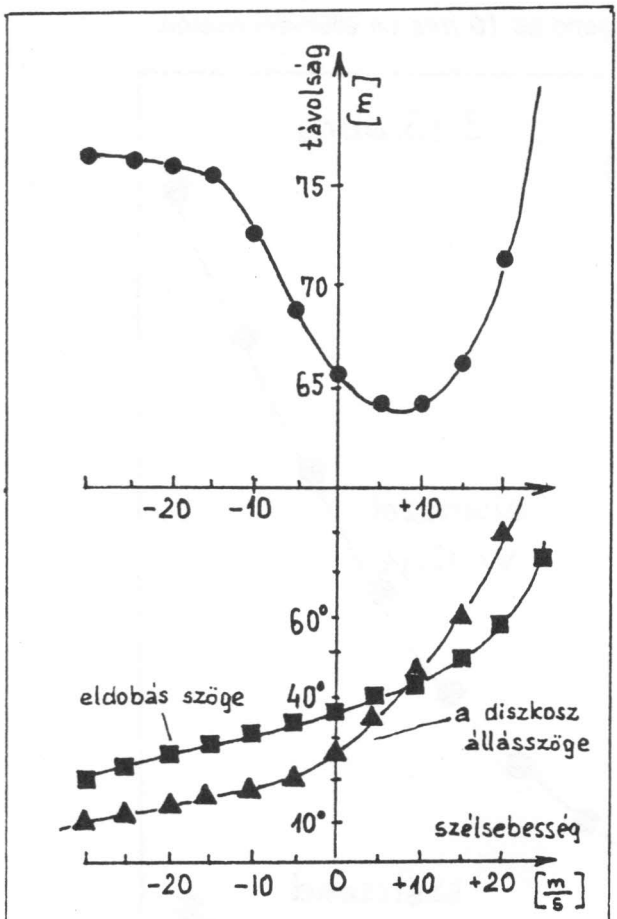
A program lehetővé teszi, hogy a mozgásegyenletben szereplő paraméterek (v_{sz} szélsebesség, v_d hajítási sebesség, valamint a 3.10. ábrán jelölt szöget kezdeti értékei) szisztematikus változtatásával különböző ellenszélben, illetve hátszélben meghatározzuk az optimális dobás feltételeit.

A számítások eredménye mutatja azt a diszkoszvetők tapasztalataival is megerősített tényt, hogy ellenszélben a diszkosz távolabbra dobható, mint enyhe hátszélben vagy szélcsendben. A 3.11. ábrán optimális szögben és dőlésszöggel elhajított diszkoszpályák láthatók. A számítások során a diszkosz kezdősebességét *25 m/s*-nek, az indítási magasságot *1,8 m*-nek, a levegő sűrűségét ρ = *1,29* kg/m^3-nek választottuk, egyébként pedig a 3.1. táblázatban szereplő férfi diszkosz adatait használtuk. Az 1–4 görbék rendre az ideális hajítási pályát (légüres térben), *10 m/s*-es hátszél, szélcsend és a *10 m/s*-os ellenszél mellett kialakuló pályát mutatják. Látható, hogy az elméleti számítások szerint *10 m/s*-os ellenszélben mintegy *5–7 m*-re nagyobb dobás érhető el, mint a többi esetben.



A 3.12. ábrán a szélsebesség függvényében ábrázoltuk a maximális hajítási távolságot és a maximumok eléréséhez szükséges hajítási és dő-

lésszöget. A függvényt a $-20\ m/s \leq v_{szél} \leq +20\ m/s$ intervallumban vettük fel, nyilvánvaló azonban, hogy a sportolók szempontjából a $-10 \leq v \leq 10$ tartomány a fontos, hiszen viharos szélben már nem szokás atlétikai versenyeket tartani. Igen fontos eredménynek tünik azonban, hogy az *5–7 m/s*-os hátszél a legelőnytelenebb a diszkoszvetés szempontjából.

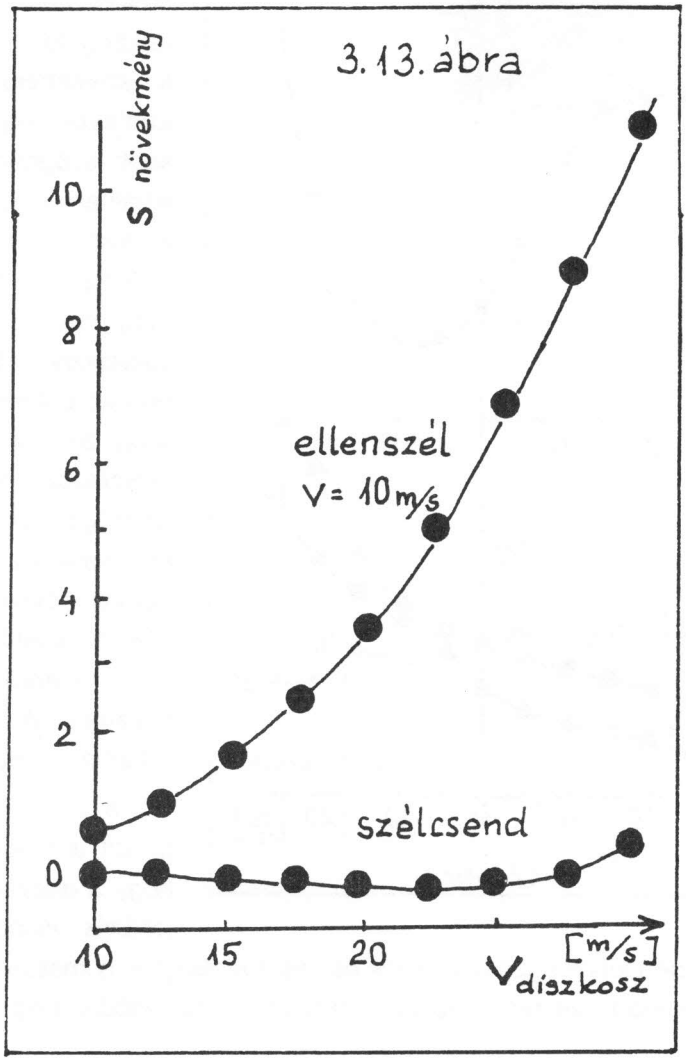


3. 12. ábra

Érdekesen változik a széltől függően az optimális hajítási és dőlésszög is. Ellenszélben a szélsebesség növekedtével egyre laposabb szögben érdemes elhajítani a diszkoszt, s a kezdeti dőlésszöget érdemes *10–15°*-kal még ennél is kisebbnek választani. Szélcsendben az optimális hajítási szög *36–40°* és ez a hátszélben nő, a dőlésszöget azonban ennél rohamosabban érdemes növelni. *10 m/s* hátszél esetén a diszkosz síkjának már párhuzamosnak kell lennie a hajítás irányával.

A 3.11. ábra mutatja azt a meglepő tényt, hogy a diszkosz a légellenállás ellenére még a légüres térben lehetséges maximális hajítási távolságnál is messzebbre dobható. A kérdés kissé részletesebb vizsgálatából az adódik, hogy a légüres

térbeli optimális hajítási távolság szélcsendben csak akkor dobható túl, ha a diszkosz sebessége 25 m/s-nál nagyobb. (Természetesen a légüres térbeli és valóságos körülmények közötti optomális hajítási szög nem azonos.) Ellenszélben azonban az aerodinamikai emelőerő fellépte jócskán megnövelheti a maximális hajítási távolságot. A 3.13. ábrán a hajítási sebesség függvényében ábrázoltuk a légüres térbeli maximális hajítási távolsághoz képest elérhető növekményt szélcsend és *10 m/s*-os ellenszél esetén.



sportszer	tömeg kg	átmérő mm	vastagság mm	világrekord m (1989)
férfi diszkosz	2	221	46	74,08
főiskolai diszkosz	1,62	211	41,3	–
női diszkosz	1	182	39	76,80

3.1. táblázat

3.3.1. A pálya kiszámításához felhasznált program

A program C-64 számítógépre készült Simon's Basic bővítés felhasználásával.

A bemenő adatok, a diszkosz kezdősebessége, az elhajítás szöge, a diszkosz állásszöge, a szél sebessége, a levegő sűrűsége, a diszkosz keresztmetszete és tömege, valamint a léptetési időköz.

A program „felhasználóbarát" formában készült, az INPUT szervezés kérdések formájában egyértelműen történik. A program a kérdezett adatok esetén azonnal javasol egy értéket, ha ezt elfogadjuk, elegendő a RETURN lenyomása. Ha nem akkor a javasolt értéket át kell írni.

A program a 3.7, 3.8 egyenletrendszert egyszerű léptető módszerrel oldja meg. A program magját az 1100–1192 sorok képezik. Végeredményként a képernyőre a diszkoszpálya rajzolódik ki.

A program változói a következők:

X1, X2 a diszkosz helykoordinátái

V1, V2 a diszkosz sebességkoordinátái

A1, A2 a diszkosz gyorsuláskomponensei

BE (β) a relatív sebesség iránya

PS (Ψ) a diszkosz állásszöge a relatív sebességhez képest

CL a felhajtóerő állandója

A CL és CD értékeket a FELHAJTÓ és KÖZEGELLENÁLLÁS eljárások állítják elő PS (Ψ) függvényében.

```
1000 PRINT "  " : COLOUR 14,6: HIRES 7,6: NRM
1020 V = 25: O = 38: RO = 1, 29: DT = .02
1030 AF = 28: G = 9,81: A = .038: M = 2: VS = 0
1040 EXEC BEOLVAS
1050 BE = ATN (V2/ (V1-VS) ) : PS = AL-BE
1060 REM
1100 EXEC FELHAJTÓ
1101 EXEC KÖZEGELLENÁLL
1110 VR = V2* V2+ (V1-VS) * (V1-VS) : K = .5 * RO * A * VR/M
1120 A1 = -K * (CD * COS (BE) + CL * SIN (BE) )
1130 A2 = -G+K * (CL * COS (BE) -CO * SIN (BE) )
1140 X1 = X1 + V1 * DT+.5 * A1 * DT * DT
1150 X2 = X2 + V2 * DT+.5 * A2 * DT * DT
1160 V1 = V1 + A1 * DT
1170 V2 = V2 + A2 * DT
1180 BE = ATN (V2/ (V1-VS) ) : PS = AL-BE
1190 IF X2 <O THEN 1193
1191 EXEC RAJZOL
1192 GOTO 1100
1193 NRM : PRINT AT (5,20) " F1 -HIRES"; AT (25,20) " F3 -NRM"
1194 PRINT AT (10,21) "ÚJ SZÁMOLÁS: "; AT (5,22)" F5 -TÖRLÉS
     NÉLKÜL"
1195 PRINT AT (25,22)" F7 -TÖRLÉSSEL "
1196 PRINT AT (0,23)"A DOBÁS HOSSZA: "; x1;" "
1200 GET A$: IF A$ = " " THEN 1200
1210 IF A$ = " " THEN CSET 2: GOTO 1200
```

```
1220 IF A$ = "■" THEN NRM: GOTO 1200
1230 IF A$ = "■" THEN NRM: GOTO 1040
1240 IF A$ = "■" THEN HIRES 7,6:NRM:GOTO 1040
1250 GOTO 1200
2000 REM FELHAJTO
2010 PROC FELHAJTO
2020 IF ABS(PS)<=.4886921 THEN CL =1.8007245 RBS(PS): GOTO 2080
2030 IF ABS(PS)<=.6108652 THEN CL =.88-2.3736823 (ABS(PS) -
     .4886921): GOTO 2080
2040 IF ABS(PS)<=1.2217305 THEN CL =.59-.4092555 (ABS(PS) -
     .6108652): GOTO 2080
2050 CL = .34-.9740282 (ABS(PS)-1.2217305)
2080 IF PS<0 THEN CL =-1 CL
2090 END PROC
2100 REM KÖZEGELLENÁLL
2110 PROC KÖZEGELLENÁLL
2120 IF ABS (PS)<=.4712389 THEN CD =.06+1.2240462 (ABS(PS) -
     .0872664): GOTO 2180
2130 IF ABS(PS)<=1.2217305 THEN CD =.53+.6262561 (ABS(PS) -
     .4712389): GOTO 2180
2140 CD = 1+.2291831 (ABS(PS)-1.2217305)
2180 END PROC
2200 REM RAJZOL
2210 PROC RAJZOL
2220 PLOT X1* 4.200-(X2* 4),1
2230 END PROC
2500 REM BEOLVAS
2502 PROC BEOLVAS
2505 B$="              " : X1=0 : X2=2
```

```
2510 PRINT" "
2520 PRINT AT(0,3) "A DISZKOSZ KEZDŐ KOORDINÁTÁI:"
2530 PRINT AT(5,4) "X1= 0"; AT(20,4)"X"= 2"
2540 PRINT AT(0,5) "KEZDŐ SEBESSÉG ÉS HAJÍTÁSI SZÖG:"
2550 PRINT AT(5,6) "V= ";V; AT(7,6)"";: INPUT V
2560 PRINT AT(20,6) "O= ";O; AT(22,6) "";: INPUT O
2570 PRINT AT(0,6) B$; AT(5,6) "V="; AT(20,6) "O="; O
2600 OO=O* ¶/180: V1=V * COS(OO): V2=(V * SIN(OO) )
2610 PRINT AT(0,7) " HÁTSZÉL SEBESSÉGE:"
2620 PRINT AT(5,8) "VS= "; VS; AT(8,8) ""1,: INPUT VS
2630 PRINT AT(0,8) B$; AT(5,8) "VS=";VS
2640 PRINT AT(0,9) " DISZKOSZ ÁLLÁSSZÖGE:"
2650 PRINTAT(5,10) "AL= "; AF; AT(8,10) "";: INPUTAF
2670 PRINTAT(0,10) B$; AT(5,10) "AL="; AF
2680 AL=AF* π/180
2690 PRINT AT(0,11) "A LEVEGŐ SŰRŰSÉGE:"
2700 PRINT AT(5,12) "RO= ",RO; AT(8,12) "";: INPUT RO
2710 PRINTAT(0,12) B$; AT(5,12) "RO="; RO
2720 PRINTAT(0,13) "KERESZTMETSZET ÉS TÖMEG:"
2730 PRINTAT(5,14) "A= ";A; AT(7,14) "",: INPUT A
2740 PRINTAT(20,14) "M= ";M;AT(22,14) "";: INPUT M
2750 PRINTAT(0,14) B$; AT(5,14) "A=";A; AT(20,14) "M="; M
2760 PRINTAT(0,16) "A LÉPTETÉSI IDŐKÖZ:"
2770 PRINTAT(5,17) "DT= ";DT;AT(8,17) "";:INPUT BT
2780 PRINTAT(0,17) BS;AT(5,17) "DT=";DT
2820 GETA :IFA$="" THEN 2820
2830 CSET 2:END PROC
```