I. SPORTSZEREK A LEVEGŐBEN; MITŐL FÜGG A PÁLYA ALAKJA?

1. Ami a ferde hajításról eszünkbe jut

Pusztán a nehézségi erő hatására a testek kezdősebességüktől függően egyenes vagy parabolapályán mozognának. Ez a hajítási parabola a különböző dobószámok (súly, gerely, diszkosz, kalapács), illetve a labdajátékok (futball, tenisz, pingpong stb.) esetén a sportszer mozgási pályájának legegyszerűbb közelítése, de ugyanezzel közelíthetjük a különböző ugrások során a levegőben repülő sportoló súlypontjának mozgását is.

Mennyire eltérőek azonban a valóságban ezek a pályák! A sportszerek mozgását a nehézségi erő mellett első közelítésben elhanyagolt egyéb hatások döntően befolyásolják, s a valódi mozgásban az eredeti hajítási parabola szinte fel sem ismerhető. Így például ha arra az igen természetes kérdésre keresünk választ, hogy egy sporteszközt (kalapácsot, diszkoszt, súlygolyót) hogyan kell elindítani ahhoz, hogy adott kezdősebesség mellett a legmesszebbre repüljön, akkor azonnal rájöhetünk arra, hogy pusztán a ferde hajítás törvényeinek alkalmazása mit sem ér.

A következőkben néhány sporteszköz mozgását elemezve megmutatjuk, hogy az adott sport esetén melyek a leginkább fontos hatások, amelyek a nehézségi erő mellett a sportszer pályáját megszabják.

1.1. A súlylökés

A hajításoknak az iskolából ismert elméleti leírása a súlylökésben felel meg leginkább a kísérleti tapasztalatoknak. A viszonylag kis kiterjedésű nehéz súlygolyó *(7,25 kg)* a többi szerhez képest csak kis sebességgel indítható el, ezért mozgását a légellenállás csak csekély mértékben módosítja. (A légellenállás hatása pl. a hosszú gerely és a lapos diszkos esetén már korántsem hanyagolható el.)

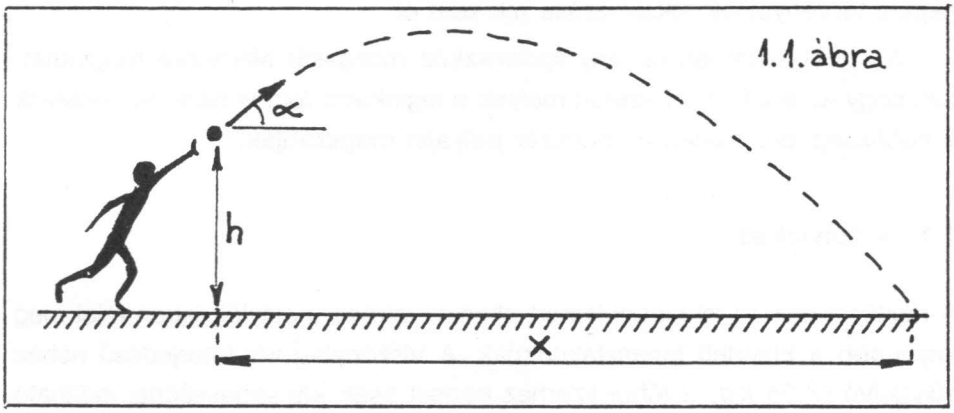
A súlygolyó mozgását a kilökés magassága, szöge és a kezdősebesség egyértelműen megszabja. Nyilvánvaló, hogy ha növeljük a hajítás sebességét, növekszik a dobás távolsága is: elsősorban tehát a kilökés magasságának és szögének szerepét kell tisztázni. A ferde hajításra vonatkozó összefüggésekből egyszerűen adódik, hogy a talajszintről azonos nagyságú *v* sebességgel elhajított testek közül a *45°*-ban elengedett repül a legmesszebbre. A súlylökök azonban a talajszintnél magasabbról hajítják el a golyót. Vajon mi az optimális hajítási szög ebben az esetben?

1.1.1. A súlylökés optimális szöge

Fogalmazzuk meg a feladatot a szokásos formában:

Milyen szög alatt kell elhajítanunk *h* magasságból, adott v_0 sebességgel egy testet ahhoz, hogy a hajítás távolság a vízszintes síkon a legnagyobb legyen?

Ez a feladat bár matematikailag kissé bonyolult, egzakt módon megoldható. Írjuk fel a ferde hajítás függőleges és vízszintes összetevőjére vonatkozó egyenleteket az 1.1. ábra jelöléseivel:



$$-h = t\,v_0 \sin\alpha - \frac{g}{2}t^2 \qquad (1.1)$$

$$x = t\,v_0 \cos\alpha \tag{1.2}$$

Fejezzük ki a második egyenletből az időt és helyettesítsük az elsőbe. Átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 - x\,\mathrm{tg}\alpha - h = 0 \tag{1.3}$$

Fejezzük ki ebből az egyenletből x-et:

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\cdot h}{g}}$$

Alakítsuk át a kapott összefüggést a $k^2 = \frac{2gh}{v_0^2}$ jelölés bevezetésével az

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left[\cos\alpha\cdot\sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + k^2}\right] \tag{1.4}$$

formára és a szélsőérték meghatározás céljából deriváljuk az α szög szerint. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g}\left[-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + k^2} + \frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + k^2}}\right] \tag{1.5}$$

A maximumhelyen a derviált zérus, így $\frac{dx}{d\alpha} = 0$-ból a $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ összefüggés felhasználásával és átrendezéssel a

$$\cos 2\alpha\sqrt{k^2 + \sin^2\alpha} = k^2\sin\alpha - \sin\alpha\cdot\cos 2\alpha$$

egyenlethez jutunk. Négyzetreemelve az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$k^2\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha \sin^2\alpha = k^4\sin^2\alpha - 2k^2\sin^2\alpha\cos 2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2 2\alpha$$

amiből a

$$\cos^2 2\alpha + 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha = k^2\sin^2\alpha$$

illetve a $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ összefüggéssel a

$$\cos 2\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha) = k^2\sin^2\alpha$$

azaz a

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = k^2\sin^2\alpha$$

egyenlethez jutunk. $\sin^2\alpha$-val végigosztva a maximális hajítási távolságot adó szögre a

$$\mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + k^2 \tag{1.6}$$

eredmény adódik. Felhasználva az

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha$$

valamint a

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$$

azonosságot (1.6)-ból a

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2 + k^2}} \tag{1.7}$$

és

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + k^2}{2 + k^2}} \tag{1.8}$$

összefüggés adódik. Az (1.7) és az (1.8) eredményeket az (1.4) összefüggésbe behelyettesítve a maximális hajítási távolságra az

$$x_{max} = \frac{v_o^2}{g}\sqrt{1 + k^2} \tag{1.9}$$

eredményt kapjuk, illetve visszahelyettesítve a $k^2 = \frac{2gh}{v_o^2}$ értéket:

$$x_{max} = \frac{v_o}{g}\sqrt{v_o^2 + 2gh} \tag{1.10}$$

Bár a kapott eredmények egyszerűek a számítás viszonylag hosszadalmas és a középiskolák második osztályában semmiképpen sem végezhető el.

A maximális távolságú hajítás szögének közelítő meghatározását egyszerűbben is elvégezhetjük egy számítógép segítségével. Az alábbi egyszerű program segítségével különböző magasságból és különböző kezdősebességgel indított testek hajítási távolságát irathatjuk ki a C64 számítógép segítségével a *37°–45°* határok között tetszőleges $\Delta\alpha$°-os lépésekben.

```
10 INPUT H
20 INPUT V(o)
30 INPUT a
40 FOR I = 37 TO 45 STEP a
50 K = (2 * 9,81 * H) / (V(o) * V(o))
```

$$60\ x = V(o) \uparrow 2/9{,}81 * \cos\left(\frac{I * 2 * \pi}{360}\right) * \sin\left(\frac{I * 2 * \pi}{360}\right) +$$

$$+ \cos\left(\frac{I * 2 * \pi}{360}\right) * \mathrm{sqr}\left[\sin\left(\frac{I * 2 * \pi}{360}\right) \uparrow 2 + K\right]$$

```
70 PRINT x
80 NEXT
```

A kapott értékek alapján egyszerűen megállapíthatjuk, hogy az adott *v(o)* és *H* értékek mellett milyen szög mellett lesz a hajítási távolság maximális. Természetesen a program egyszerűen bővíthető úgy, hogy a hajítási pálya is a képernyőre kerüljön. A C64 gép esetén ehhez azonban célszerű valamilyen a rajzolást támogató segédprogramot (SIMON'S BASIC, GRAPHIC BASIC stb. felhasználni.)

1.2. Jó közelítés-e a ferde hajítás?

Vizsgáljuk meg most azt, hogy a fentiekben közölt számításoknak mi a valóságtartalma. Az 1.1. táblázatban az összehasonlítás kedvéért a *10–15 m/sec*-os és *1,7; 2; 2,2* magasból történő kilökés esetén megadjuk a számítások szerint optimális, valamint a *42°*-os és *45°*-os hajítási szögben elhajított testek hajítási távolságát.

A táblázat mutatja, hogy a legcélszerűbb hajítási szög a súlygolyó kilökési magasságának és kezdősebességének függvényében csak csekély mértékben változik. Az is jól látszik, hogy a legkedvezőbbtől való kis eltérések (*42°*-os hajítás) a dobás hosszát csak *1-2 cm*-rel rövíditik meg. Ezért a vizsgált sebesség és kilölési magasság tartományban hajítási szögként a *42°*-os szög gyakorlatilag egységesen elfogadható. Az eredmények még *45°*-os kilölés esetén is csak mintegy *10 cm*-t romlanak. A táblázat azt is mutatja, hogy a magasabb súlylökők előnyben vannak: azonos kezdősebesség és a lehető legjobban sikerült dobás esetén eredményük majdnem annyival jobb alacsonyabb vetélytársukénál, ahány centiméterrel magasabbról tudják ellökni a súlygolyót.

v (m/s)	h = 1,7 m				h = 2 m			
	opt	X_{max}	$X_{42°}$	$X_{45°}$	opt	X_{max}	$X_{42°}$	$X_{45°}$
10	40,9	11,77	11,76	11,68	40,3	12,02	12,01	11,91
11	41,5	13,93	13,93	13,84	41	14,19	14,19	14,09
12	42	16,29	16,22	16,22	41,6	16,56	16,57	16,46
13	42,4	18,85	18,85	18,79	42	19,12	19,12	19,04
14	42,8	21,61	21,61	21,56	42,4	21,89	21,89	21,81
15	43	24,57	24,56	24,53	42,7	24,86	21,85	24,79

v (m/s)	h = 2,2 m			
	opt	X_{max}	$X_{42°}$	$X_{45°}$
10	39,9	12,20	12,17	12,05
11	40,6	14,37	14,35	14,24
12	41,3	16,73	16,73	16,62
13	41,7	19,30	18,30	19,20
14	42,2	22,07	22,07	21,98
15	42,5	25,04	25,04	24,96

1.1. táblázat

Számításaink a kísérleti tapasztalatokkal igen jól megegyeznek. *O'Brien* amerikai súlylökő 1958 augusztusában *18,41 m*-es eredménnyel világcsúcsot ért el. A dobásról készült filmfelvételről *Balog Lajos* meghatározta, hogy az amerikai sportoló a súlygolyót *2,2 m* magasból *12,6 m/sec* sebességgel indította. Megállapította továbbá, hogy a kilökés a dobókör szélénél *14 cm*-re kijjebb történt, azaz a lökés valóságos távolsága csak *18,27 m* volt. Ezekkel az adatokkal elméletileg a legnagyobb hajítási távolságra

18,25 m adódik, ami az adott mérési pontosságot figyelembevéve kitünően egyezik a valósággal. Az eredmény azt is mutatja, hogy a világcsúcs alkalmával *O'Brien* a legcélszerűbb kilökési szöget is nagyon „eltalálta". (Az elmélet szerint ez *41,56°*, míg a filmről *41,66°*-ot olvastak le.)Mindebből láthatjuk, hogy a súlylökésben a súlygolyónak a levegőben való mozgása valóban tökéletesen leírható a „hajítások fizikájával". Mivel a súlygolyó indítása is szinte a lehető legjobban hajtható végre, így az *O'Brien* világcsúcsa óta végbemenő óriási fejlődés elsősorban abból adódott, hogy növekedett az elhajítás sebessége. (Jelenleg a világcsúcsot *Timmermann* tartja *23,06 m*-rel.) Az igazán nagy problémát ezzel kapcsolatban az jelenti, hogy a súlylökők a legjobb kilökési szögnél laposabb szög esetén képesek a legnagyobb sebességgel kilökni a golyót. Az optimális megoldás elméleti meghatározásakor tehát a kilökés sebességét és magasságát sem tekinthetjük függetlennek a kilökés szögétől.

Mi az oka ennek? A súlylökésről készített filmfelvételek alapján viszonylag könnyen meghatározható a golyó kilökésének magassága és a golyó sebessége. Korántsem igaz azonban, hogy ezek az adatok jellemzők magára az atlétára. Ha kilökés folyamatát is vizsgáljuk, akkor az atlétára jellemző adatként az egy dobás során végzett összes munkát *(W)*, vagy méginkább a dobásban kifejtett teljesítményt *(P)*, tekinthetjük. A kilökés magasságát pedig a dobó vállmagasságából (h_0) és karjának hosszúságából *(l)* számíthatjuk ki. Az 1.2. ábra jelöléseit felhasználva a golyó kilökésének sebessége adott α szög mellett a munkatételből számítható ki.

E szerint a súlylökő által a súlygolyón végzett *W* munka

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg\left(h_1 + l \sin\alpha\right)$$

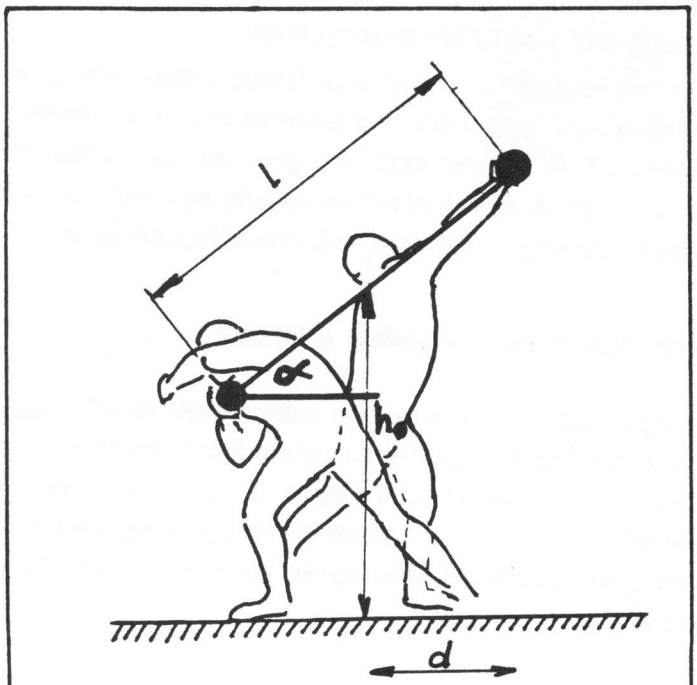
a helyzeti és mozgási energia megnövelésére fordítódik. Az összefüggésből

$$v = \sqrt{\frac{2\left(W - mg\left(h_1 + l \sin\alpha\right)\right)}{m}} \qquad (1.11)$$

adódik, ami mutatja, hogy laposabb szög esetén a kilökés sebessége nagyobb lehet. Ugyanakkor a szög csökkenésével a

$$h = h_1 + l \sin\alpha$$

hajítási magasság is kissé csökken.



1.2. ábra

Mindazonáltal elképzelhető, hogy kissé laposabb szögű hajítás mellett nagyobb dobás érhető el. Ezek a feltételezések azonban kísérletileg nehezen vizsgálhatók, hiszen a dobóatléta által a dobás során végzett munka nehezen mérhető.

2. A labda pályája

A súlygolyó pályájának az iskolai fizikával szinte tökéletesen követhető leírása után foglalkozzunk most egy nehezebb problémával; a labda fizikájával.

Miközben dobjuk, rúgjuk, ütjük a labdát, nemigen gondolunk arra, hogy a sikeres játék feltétele az, hogy megfelelően alkalmazkodunk a labda mozgását megszabó alapvető fizikai törvényekhez.

Mekkora sebességgel repülhet egy labda, milyen alakú a röppálya, mekkor erő hat a fejelő játékosra, hogyan lehet szögletből érintés nélkül gólt szerezni? Ilyen és más hasonló kérdések gyakran felmerülnek a labdajátékokkal kapcsolatban. A következőkben néhány egyszerű, a labdajátékokkal kapcsolatos jelenség fizikai magyarázatával foglalkozunk.

2.1. Mekkora sebességgel repülhet a labda?

Becsüljük meg először azt, hogy milyen sebességgel repülhet egy jó erősen megrúgott futball labda! Kirúgáskor az ötösre letett labdát a hátvéd vagy a kapus rendszerint a félpályán túlra juttatja. A labda ívelt pályája, ha nem lenne légellenállás, éppen a már részletesen tárgyalt hajítási parabola lenne. Adott sebesség mellett a maximális hajítási távolság $\alpha = 45°$-os indítás esetén adódik és

$$x_{max} = \frac{v_o^2}{g} \tag{2.1}$$

Tegyük fel, hogy a kapustól kirúgott labda ezen az optimális pályán a felezővonalig (kb. *60 m*) jut el. A (2.1) összefüggést felhasználva a labda kezdősebessége kb. *30 m/sec (30 m/sec = 108 km/ó)* nagyságúnak adódik. Durva becslésünk szerint tehát a kirúgott labda sebessége megközelíti az autópályán megengedett maximális sebességet. Mivel a légellenállás a labdát erősen fékezi, biztosak lehetünk abban, hogy felezővonalig rúgott labda kezdősebessége ezt azt értéket jóval meghaladja. Amennyiben tehát

pontosabb becsléseket akarunk adni, akkor a közegellenállás törvényeivel kell foglalkoznunk.

Ez a téma többnyire nem szerepel a középiskolai tananyagban, s mint látni fogjuk általában csak közelítőleg, tapasztalati törvényekre támaszkodva tárgyalható.

2.2. A közegellenállás hatása a labdajátékokban

Kis sebességgel mozgó és kisméretű gömb esetén a közeg mozgást akadályozó hatását a Stokes-féle törvény írja le. Az F közegellenállási erő egyenesen arányos a mozgás v sebességével, a gömb r sugarával, és a közeg η viszkozitási tényezőjével. A Stokes-féle közegellenállási törvény szerint

$$F = 6\pi\eta rv \tag{2.2}$$

A törvény akkor is érvényes, ha a gömböt v sebességgel áramló közegben nyugalomban tartjuk, azaz v tulajdonképpen a közeg és a test relatív sebességét jelenti.

A kis sebességű áramlásokban a közeg szabályosan, örvényképződés nélkül mozog (lamináris áramlás). Az ellenállás ilyen esetben az áramló közeg belső súrlódásából származik. Ebben az esetben ugyanis az áramló közegbe helyezett test felületén a közeg és a test pontjainak relatív sebessége zérus, és a sebesség a testtől távolodva fokozatosan nő fel a nyílt áramlási térben mért értékre. A szomszédos folyadékrétegek közötti sebesség különbség miatt nyíró erők ébrednek, s a testre ható közegellenállási erő tulajdonképpen ennek a következménye. A gömb sugarát vagy sebességét növelve a *Stokes* törvény (2.2) érvényét veszti, a közegellenállás rohamosan nő. A közegellenállás változását az okozza, hogy nagyobb sebességeknél az áramlás már nem lamináris, a gömb mögött örvények képződnek. A közegellenállási erő felléptét ekkor durván azzal indokolhatjuk, hogy az örvények nagy forgási energiájának fedezésére munkát kell végezni. Az örvények kinetikus energiája a test mozgása során megmozgatott tömeggel

és a test sebességének négyzetével vehető arányosnak. Egy v sebességgel mozgó gömb Δt idő alatt közelítőleg

$$m \approx \rho A v \cdot \Delta t \tag{2.3}$$

tömegű anyagot mozgat meg, ahol ρ a közeg sűrűségét, A a gömb homlokfelületét (főkörének t erületét) $(A = r^2\pi)$ jelöli. A mozgatás során végzett $W = Fv\Delta t$ munka a közeg mozgási energiájává alakul, majd disszipálódik. Tegyük fel, hogy a megmozgatott m tömegű anyag v^* sebessége arányos a mozgó gömb v sebességével.

Ezek alapján tehát

$$Fv\Delta t = c\frac{1}{2}mv^2 = \frac{c}{2}A\rho v \cdot \Delta t \cdot v^2. \tag{2.4}$$

A közeg mozgatásából adódó közegellenállásjárulék

$$F = \frac{c}{2}A\rho v^2 = 0.225\,\pi\rho\, r^2 v^2, \tag{2.5}$$

c arányossági tényező az ún. „közegellenállási tényező" értéke gömb esetén $c = 0{,}45$.

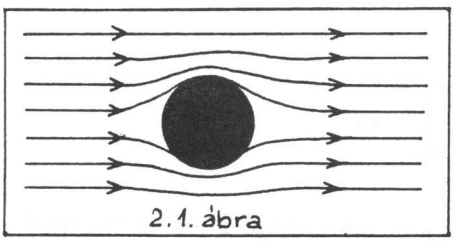
Általános esetben a közegellenállást a közeg belső súrlódása révén adódó (2.3) összefüggés és a közeg felgyorsításából adódó ellenállás (2.5) kifejezése együtt határozza meg.

$$F = 6\pi\rho\, rv + \frac{c}{2}\pi\rho\, r^2 v^2 \tag{2.6}$$

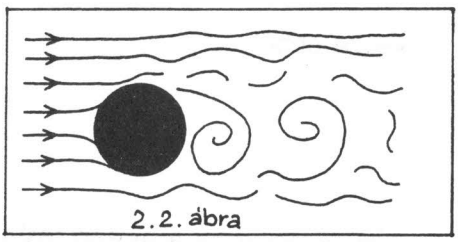
A 2.6 kifejezés első tagjában az r sugár és a v sebesség az első hatványon szerepel, a második tag azonban mind r-től, mind v-től négyzetesen függ. Kis sebességek és kis átmérőjű gömb esetén a második tag elhanyagolható. Nagy sebességek és sugár esetén a második tag válik meghatáro-

zóvá, míg a *Stokes* törvény elhagyható. A labda mozgását vizsgálva ez utóbbi közelítést alkalmazhatjuk.

A közegellenállásnak a mozgás sebességétől és a mozgó test nagyságától való függését szemléletesen magyarázhatjuk a közegben kialakuló áramlási viszonyok alapján is. Kis méretű, kis sebességű gömb esetén a mozgó test környezetében lamináris áramlás alakul ki. A mozgó testtől távolodva a közeg egyes rétegei egyre kisebb sebességgel követik a mozgást. Az azonos sebességű rétegek elhelyezkedését a 2.1. ábrán bemutatott áramlási kép szemléleteti. Nagy sebesség esetén a mozgó test mögött a közeg örvényes, bonyolult mozgást végez – az áramlás turbulenssé válik (2.2. ábra). Ez akkor következik be, ha az áramlást jellemző dimenzió nélküli paraméter az ún. *Reynolds* féle szám $\left(R_e = \frac{r\rho v}{\eta}\right)$ értéke meghaladja az $R_{ekr} = 1200$ kritikus értéket. A *Reynolds* szám jó közelítéssel meghatározható a (2.6) formula két tagjának hányadosaként.



2.1. ábra



2.2. ábra

A következőkben mennyiségileg is megvizsgáljuk, hogy hogyan fékezi a labda mozgását a közegellenállás!

2.2.1. Vízszintesen mozgó labda

A legegyszerűbb esetben a labda vízszintes irányban mozog és csak a közegellenállás fékezi. (Ez az erős feltételezés a valóságban soha nem teljesül, egyszerű matematikai tárgyalása azonban érdekes eredményekre vezet.) A ρ sűrűségű közegben mozgó m tömegű r sugarú gömb mozgásegyenlete

$$m\frac{dv}{dt} = -\,0.225\,\rho\, r^2\pi v^2 \tag{2.7}$$

Vezessük be a $k = \dfrac{0.225\rho r^2\pi}{m}$ egyszerűsítő jelölést. (k paraméter értéke a közeget és a mozgó testet együtt jellemzi.) A

$$\frac{dv}{dt} = -\,kv^2$$

mozgásegyenletet integrálva:

$$\int_{v_o}^{v} \frac{1}{v^2}\,dv = -\,k\int_0^t dt$$

illetve ebből

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_o} = kt$$

adódik, ahonnan a mozgó test pillanatnyi sebessége t idő elteltével a

$$v = \frac{v_o}{1 + kv_o t} \tag{2.8}$$

alakban fejezhető ki. A test t idő alatt megtett x útja

$$x = \int v dt = \int \frac{v_o}{1 + kv_o t} dt$$

$$x = \frac{1}{k}\ln\left(1 + kv_o t\right) \tag{2.9}$$

A test által megtett út tehát logaritmikusan nő az idő függvényében. A (2.8) és (2.9) összefüggések felhasználásával adódik, hogy a mozgó test sebessége a

$$v = v_0 e^{-kx}$$

függvény szerint exponenciálisan csökken a távolság függvényében.

A mozgásra jellemző az $x^* = \frac{1}{k}$ távolság, amelynek megtétele során a test sebessége e-ed részére csökken. x^* értéke független a test kezdősebességétől.

Eredményünket felhasználva érdemes kiszámítani, hogy a különböző labdajátékok esetén hogyan csökken a labda sebessége a játéktér átrepülése során. Az alábbi táblázatban az asztalitenisz, a tenisz, a football és a golf adatait tüntettük fel.

labdajáték	a labda tömege (kg)	a labda sugara (m)	k	a játéktér hossza(L) (m)	x*	e^{-kL}
asztalitenisz	0,0025	0,019	0,13	2,74	8	0,7
tenisz	0,058	0,033	0,018	24	58	0,7
fottball	0,45	0,11	0,025	120	40	0,05
golf	0,045	0,022	0,0082	–	120	–

2.1. táblázat

A fenti módon számított, a táblázatban közölt értékek és a mérésekkel kapható tényleges adatok a pingpong és a tenisz esetében jól megegyeznek. A football és a golf esetén azonban lényegesen eltérnek. A mérések szerint a labda sebessége kevésbé csökken mint ahogy a számítás alapján adódik. Az eltérés oka az, hogy számításainkban a gömbökre szélcsatorna mérések alapján adódó c együttható értékét a sebességtől független állan-

dónak *(c = 0,45)* tekintettük. A viszonylag nagy méretű és gyorsan mozgó football, illetve golflabda esetén c értéke kisebb *(c ≈ 0,15)*, (2.4. ábra).

2.2.2. Szabadon eső labda

A szabadon eső labdára a nehézségi erő és a közegellenállási erő hat. Mozgásegyenlete

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{c}{2}\rho r^2 \pi v^2$$

azaz

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \tag{2.10}$$

A (2.10) egyenletből következik, hogy az eső labda csak

$$v = u = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{2.11}$$

sebesség értékig gyorsul és ezután már változatlan állandó sebességgel folytatja az útját. A (2.10) összefüggés (2.11) felhasználásával a

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right)$$

alakra hozható. A differenciálegyenlet integrálásával

$$u^2 \int \frac{dv}{u^2 - v^2} = g \int dt$$

megadható a labda pillanatnyi sebessége mint az idő függvénye.

$$v = u\,\mathrm{tgh}\left(\frac{gt}{u}\right) \tag{2.12}$$

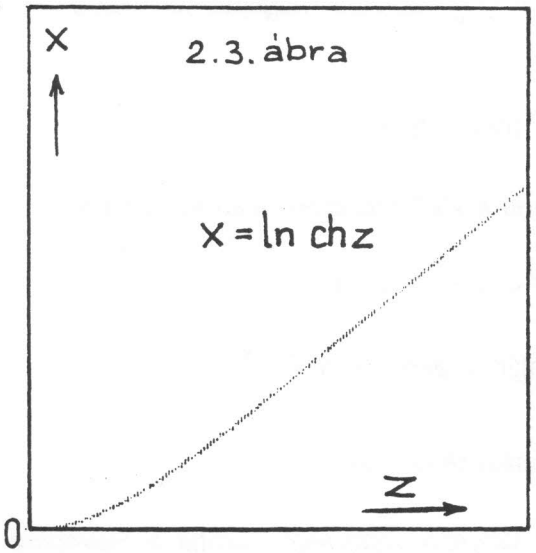
Az esés során megtett út a (2.12) függvény idő szerinti integrálásával adódik;

$$x = \int v dt = u \int \mathrm{tgh}\left(\frac{gt}{u}\right) dt = \frac{u^2}{g} \ln \mathrm{ch}\left(\frac{gt}{u}\right)$$

illetve $u = \sqrt{\frac{g}{k}}$ felhasználásával

$$x = \frac{1}{k} \ln \mathrm{ch}\left(\frac{gt}{u}\right)$$

A 2.12 összefüggés grafikonja (2.3. ábra) jól mutatja azt a tapasztalatból ismert tényt, hogy az eső testek sebessége rövidebb-hosszabb idő elteltével állandóvá válik.



A (2.12) és (2.13) összefüggésből becslést adhatunk pl. arra, hogy milyen hosszú esés után közelíti meg a szabadon eső labda a végsebességét. Egy zsebszámológép segítségével ellenőrizhetjük, hogy $x^* = \frac{1}{k}$ távolság megtétele után a test sebessége kb. *92–93 %*-a az u végsebességének, így a keresett távolság jó közelítéssel $\frac{1}{k}$.

A k állandó (2.10)-ből adódó

$$k = \frac{c\rho r\pi}{2m} \tag{2.14}$$

definicióját felhasználva, valamint a test $m = \frac{4}{3} r^3 \pi \rho_t$ tömegét beírva a 2.14 összefüggésbe, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{k} = \frac{8}{3c} \frac{\rho_t}{\rho_k} r \tag{2.15}$$

Az eső testek sűrűsége a levegő sűrűségének kb. *800–8000*-szerese, a *c* közegellenállási együttható pedig gömb esetén *0,15–0,45* között változik, így a végsebességet a test

$$x = \frac{1}{k} = B \cdot 1000\, r$$

úton éri el, ahol $5 < B < 144$ a közegellenállási és sűrűség viszonyoktól függően. $x^* = \frac{1}{k}$ becslése után az $u = \sqrt{\frac{g}{k}}$ képletből meghatározhatjuk a végsebességet is. Erre

$$u = 1000 \sqrt{B \cdot r}$$

adódik, azaz az eső test sebessége a sűrűségviszonyoktól függően a

$$400 \sqrt{r} < u < 1200 \sqrt{r}$$

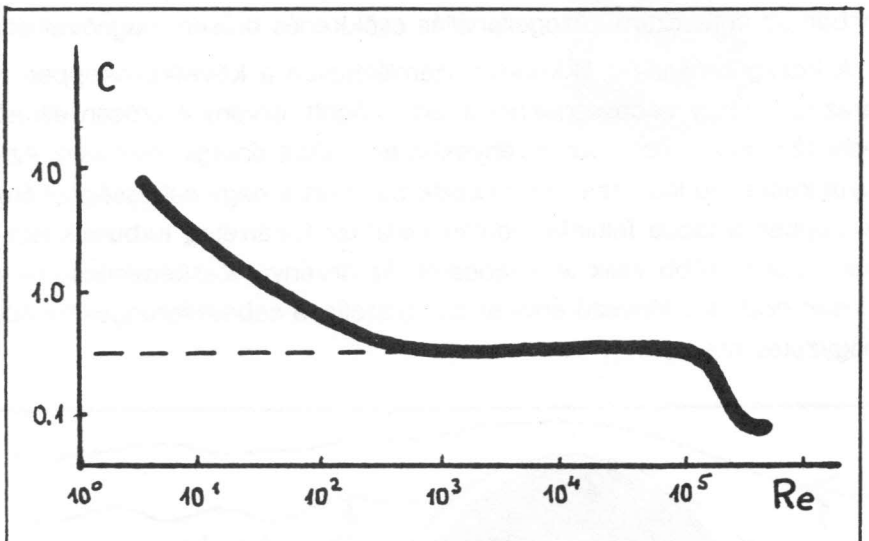
intervallumba esik ($\sqrt{r}$ együtthatójának dimenziója $m^{-0,5} s^{-1}$).

2.2.3. Mitől függ a közegellenállási tényező?

A 2.4. ábra a *c* közegellenállási tényező változását mutatja a *Reynolds* szám függvényében. A tapasztalati úton felvett összefüggés szerint a *Rey-*

nolds szám *100–200 000* közötti intervallumában a közegellenállási tényező jó közelítéssel állandó és *c ~ 0,45.*

A labdajátékok esetén az alacsony *Reynolds* számok tartománya általában jelentéktelen. A viszkozitási és sebesség viszonyok többnyire olyanok, hogy a *Reynolds* szám az állandó közegellenállási tényezőhöz tartozó intervallumba esik. Egyes esetekben pl. a labdarúgás és a golf esetén



2.4. ábra

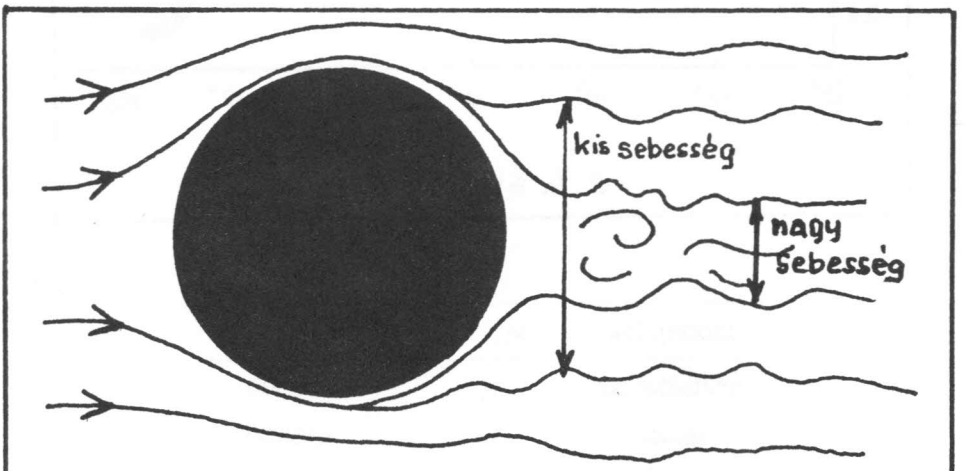
labdajáték	v_{kr} m/s	Re (30 m/s)
asztalitenisz	100	70000
tenisz	55	120000
labdarúgás	16	429000
golf	80	80000

2.2. táblázat

jelentős szerepet játszhat a közegellenállási tényező hirtelen csökkenése is. A következő táblázat azokat a jellegzetes sebességeket mutatja, amelyeknél a közegellenállási tényező csökkenése elkezdődik. Összehasonlításul megadjuk a *30 m/s* sebességhez tartozó Reynolds számot is.

A táblázat jól mutatja, hogy asztalitenisz és tenisz esetén a közegellenállási tényező csökkenésére nem kell számítanunk. Az erősen megrúgott football, illetve a nagy sebességgel száguldó golf labda repülési távolságát azonban az ugrásszerű közegellenállás csökkenés erősen megnövelheti.

A közegellenállás csökkenése szemléletesen a következőképpen magyarázható. Nagy sebességeknél a test mögötti örvényút erősen elkeskenyedik (2.5. ábra), ezért az örvényektől elszállított energia csökken. Az örvényút keskenyedése azért következik be, mert a nagy sebességgel áramló közegben a labda felülete mentén kialakuló határréteg turbulens lesz és emiatt csak később válik le a labdáról. Az örvényút keskenyedése természetesen csak a *c* tényező értékét befolyásolja, a sebességfüggés továbbra is négyzetes marad.



2.5. ábra