I. Sportszerek a levegőben. Mitől függ a pálya alakja?

I.1. Ami a ferde hajításról eszünkbe jut

Pusztán a nehézségi erő hatására a testek kezdősebességüktől függően egyenes vagy parabolapályán mozognának. Ez a hajítási parabola a különböző dobószámok (súly, gerely, diszkosz, kalapács), illetve a labdajátékok (futball, tenisz, pingpong stb.) esetén a sportszer mozgási pályájának legegyszerűbb közelítése, de ugyanezzel közelíthetjük a különböző ugrások során a levegőben repülő sportoló súlypontjának mozgását is.

Mennyire eltérőek azonban a valóságban ezek a pályák! A sportszerek mozgását a nehézségi erő mellett első közelítésben elhanyagolt egyéb hatások erősen befolyásolják, s a valódi mozgásban az eredeti hajítási parabola szinte fel sem ismerhető. Így például, ha arra az igen természetes kérdésre keresünk választ, hogy egy sporteszközt (kalapácsot, diszkoszt, súlygolyót) hogyan kell elindítani ahhoz, hogy adott kezdősebesség mellett a legmesszebbre repüljön, akkor azonnal rájöhetünk arra, hogy pusztán a ferde hajítás törvényeinek alkalmazása mit sem ér.

A következőkben néhány sporteszköz mozgását elemezve megmutatjuk, hogy az adott sportág esetén melyek azok a legfontosabb hatások, amelyek a nehézségi erő mellett a sportszer pályáját megszabják.

I.1.1. A súlylökés

A hajításoknak az iskolából ismert elméleti leírása a súlylökésben felel meg leginkább a kísérleti tapasztalatoknak. A viszonylag kis kiterjedésű, nehéz súlygolyó (*7,25 kg*) a többi szerhez képest csak kis sebességgel indítható el, ezért mozgását a légellenállás csak csekély mértékben módosítja. (A légellenállás hatása pl. a hosszú gerely és a lapos diszkosz esetén már korántsem hanyagolható el.)

A súlygolyó mozgását a kilökés magassága, szöge és kezdősebessége egyértelműen megszabja. Nyilvánvaló, hogy ha növeljük a hajítás sebességét, növekszik a dobás távolsága is; elsősorban tehát a kilökés magasságának és szögének szerepét kell tisztázni. A ferde hajításra vonatkozó összefüggésekből egyszerűen adódik, hogy a talajszintről azonos nagyságú v sebességgel elhajított testek közül a 45°-ban elengedett repül a legmesszebbre. A súlylökők azonban a talajszintnél magasabbról hajítják el a golyót. Vajon mi az optimális hajítási szög ebben az esetben?

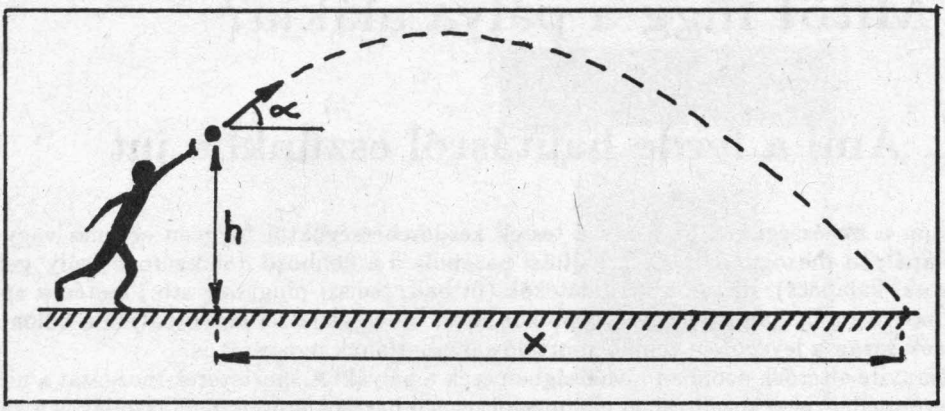
I.1.1.1. A súlylökés optimális szöge

Fogalmazzuk meg a feladatot a szokásos formában:

Milyen szög alatt kell elhajítanunk h magasságból adott v_0 sebességgel egy testet ahhoz, hogy a hajítás távolsága vízszintes síkon a legnagyobb legyen?

Ez a feladat, bár matematikailag kissé bonyolult, egzakt módon megoldható. Írjuk fel

a ferde hajítás függőleges és vízszintes összetevőjére vonatkozó egyenleteket az I.1.1. ábra jelöléseivel:



I.1.1. ábra.

$$-h = tv_0 \sin\alpha - \frac{g}{2}t^2 \tag{I.1.1}$$

$$x = tv_0 \cos\alpha. \tag{I.1.2}$$

Fejezzük ki a második egyenletből az időt, és helyettesítsük az elsőbe! Átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 - x\mathrm{tg}\alpha - h = 0. \tag{I.1.3}$$

Fejezzük ki ebből az egyenletből x-et:

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\cdot h}{g}}.$$

Alakítsuk át a kapott összefüggést a $k^2 = \frac{2gh}{v_0^2}$ jelölés bevezetésével az

$$x = \frac{v_0^2}{g^2}\left[\cos\alpha\cdot\sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + k^2}\,\right] \tag{I.1.4}$$

formára, és a szélsőérték meghatározása céljából deriváljuk az α szög szerint. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g}\left[-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + k^2} + \frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + k^2}}\right]. \tag{I.1.5}$$

A maximumhelyen a derivált zérus, így $\frac{dx}{da} = 0$-ból a $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ összefüggés felhasználásával és átrendezéssel a

$$\cos 2\alpha\sqrt{k^2 + \sin^2\alpha} = k^2 \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

egyenlethez jutunk. Négyzetre emelve az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$k^2\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha \sin^2\alpha = k^4 \sin^2\alpha - 2k^2 \sin^2\alpha \cos 2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2 2\alpha,$$

amiből a

$$\cos^2 2\alpha + 2\sin^2\alpha \cos 2\alpha = k^2 \sin^2\alpha$$

és a

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

összefüggéssel a

$$\cos 2\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha) = k^2 \sin^2\alpha,$$

azaz a

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = k^2 \sin^2\alpha$$

egyenlethez jutunk. Ha $\sin^2\alpha$-val végigosztunk, a maximális hajítási távolságot adó szögre a

$$\mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + k^2 \tag{I.1.6}$$

eredmény adódik. Felhasználva az

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha,$$

valamint a

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$$

azonosságot, (I.1.6)-ból a

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2 + k^2}} \tag{I.1.7}$$

és a

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + k^2}{2 + k^2}} \tag{I.1.8}$$

összefüggés adódik. Az (I.1.7) és az (I.1.8) eredményeket az (I.1.4) összefüggésbe behelyettesítve a maximális hajítási távolságra az

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+k^2} \tag{I.1.9}$$

eredményt kapjuk. Visszahelyettesítve a $k^2 = \frac{2gh}{v_0^2}$ értéket:

$$x_{max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{I.1.10}$$

Bár a kapott eredmények egyszerűek, a számítás viszonylag hosszadalmas.

A maximális távolságú hajítás szögének közelítő meghatározását egyszerűbben is elvégezhetjük számítógép segítségével. Az alábbi egyszerű programmal különböző magasságból és különböző kezdősebességgel indított testek hajítási távolságát írathatjuk ki a *37°–45°* határok között tetszőleges $\Delta\alpha^\circ$-os lépésekben.

```
/* Turbo Pascal program maximális távolságú hajítás */
/* szögének közelítő meghatározására */

var     h, v0, a:  real; /* magasság, kezdősebesség, lépésköz */
        k, x, i:   real; /* segédváltozó, végeredmény, ciklusváltozó */

begin
        /* A magasság, a kezdősebesség és a lépésköz bekérdezése */
        write('Magasság (m),          h='); readln(h);
        write('Kezdősebesség (m/s), v0='); readln(v0);
        write('Lépésköz (fok),        α='); readln(a);

        i:=37;
        repeat
                k:=(2*9.81*h)/sqr(v0);        /* sqr(x): x négyzete */
                                              /* sqrt(x): x négyzetgyöke */
                x:=(sqr(v0)/9.81)*(cos(i*pi/180)*sin(i*pi/180)
                          +cos(i*pi/180)*sqrt(sqr(sin(i*pi/180))+sqr(k)));
                writeln(x:11:5);
                i:=i+a
        until i>45
end.
```

A kapott értékek alapján egyszerűen megállapíthatjuk, hogy az adott v_0 és h értékek mellett milyen szögnél lesz a hajítási távolság maximális. Természetesen a program egyszerűen bővíthető úgy, hogy a hajítási pálya is a képernyőre kerüljön.

I.1.2. Jó közelítés-e a ferde hajítás?

Vizsgáljuk meg most azt, hogy a fentiekben közölt számításoknak mi a valóságtartalmuk. Az I.1.1. táblázatban az összehasonlítás kedvéért a *10-15 m/s*-os és *1,7; 2; 2,2 m* magasból történő kilökés esetén megadjuk a számítások szerinti optimális, a *42°*-os és a *45°*-os hajítási szögben elhajított testek hajítási távolságát.

A táblázat mutatja, hogy a legcélszerűbb hajítási szög a súlygolyó kilökési magasságának és kezdősebességének függvényében csak csekély mértékben változik. Az is jól látszik, hogy a legkedvezőbbtől (*42°*-os hajítás) való kis eltérések a dobás hosszát csak *1-2 cm*-rel rövíditik meg. Ezért a vizsgált sebesség- és kilökési magasságtartományban hajítási szögként a *42°*-os szög gyakorlatilag egységesen elfogadható. Az eredmények még *45°*-os kilökés esetén is csak mintegy *10 cm*-t romlanak. A táblázat azt is mutatja, hogy a magasabb súlylökők előnyben vannak: azonos kezdősebesség és a lehető legjobban sikerült dobás esetén eredményük majdnem annyival jobb alacsonyabb vetélytársukénál, ahány centiméterrel magasabbról tudják ellökni a súlygolyót.

	h=1,7 m				h=2 m				h=2,2 m			
$v\left(\frac{m}{s}\right)$	opt	X_{max}	$X_{42°}$	$X_{45°}$	opt	X_{max}	$X_{42°}$	$X_{45°}$	opt	X_{max}	$X_{42°}$	$X_{45°}$
10	40,9	11,77	11,76	11,68	40,3	12,02	12,01	11,91	39,9	12,20	12,17	12,05
11	41,5	13,93	13,93	13,84	41,0	14,19	14,19	14,09	40,6	14,37	14,35	14,24
12	42,0	16,29	16,22	16,22	41,6	16,56	16,57	16,46	41,3	16,73	16,73	16,62
13	42,4	18,85	18,85	18,79	42,0	19,12	19,12	19,04	41,7	19,30	18,30	19,20
14	42,8	21,61	21,61	21,56	42,4	21,89	21,89	21,81	42,2	22,07	22,07	21,98
15	43,0	24,57	24,56	24,53	42,7	24,86	21,85	24,79	42,5	25,04	25,04	24,96

I.1.1. táblázat

Számításaink a kísérleti tapasztalatokkal igen jól megegyeznek. O'Brien amerikai súlylökő 1958 augusztusában *18,41 m*-es eredménnyel világcsúcsot ért el. A dobásról készült filmfelvételről Balog Lajos meghatározta, hogy az amerikai sportoló a súlygolyót *2,2* m magasból *12,6 m/s* sebességgel indította. Megállapította továbbá, hogy a kilökés a dobókör szélénél *14 cm*-rel kijjebb történt, azaz a lökés valóságos távolsága csak *18,27* m volt. Ezekkel az adatokkal elméletileg a legnagyobb hajítási távolságra *18,25* m adódik, ami az adott mérési pontosságot figyelembe véve kitűnően egyezik a valósággal. Az eredmény azt is mutatja, hogy a világcsúcs alkalmával O'Brien a legcélszerűbb kilökési szöget is nagyon „eltalálta". (Az elmélet szerint ez *41,56°*, míg a filmről *41,66°*-ot olvastak le.) Mindebből láthatjuk, hogy a súlylökésben a súlygolyónak a levegőben való mozgása valóban tökéletesen leírható a „hajítások fizikájával". Mivel a súlygolyó indítása is szinte a lehető legjobban hajtható végre, az O'Brien világcsúcsa óta végbement óriási fejlodés elsősorban abból adódott, hogy növekedett az elhajítás sebessége. (1991-ben a világcsúcsot *Timmermann* tartotta 23,06 m-rel.) Az igazán nagy problémát ezzel kapcsolatban az jelenti, hogy a súlylökők a legjobb kilökési szögnél laposabb szög esetén képesek a legnagyobb sebességgel kilökni a golyót. Az optimális megoldás elméleti meghatározásakor tehát a kilökés sebességét és magasságát sem tekinthetjük függetlennek a kilökés szögétől.

Mi az oka ennek? A súlylökésről készített filmfelvételek alapján viszonylag könnyen meghatározható a golyó kilökésének magassága és a golyó sebessége. Korántsem igaz azonban, hogy ezek az adatok jellemzők magára az atlétára. Ha a kilökés folyamatát is vizsgáljuk, akkor az atlétára jellemző adatnak az egy dobás során végzett összes munkát (W), vagy még inkább a dobásban kifejtett teljesítményt (P) tekinthetjük. A kilökés magasságát a

dobó vállmagasságából (h_0) és karjának hosszúságából (l) számíthatjuk ki. Az I.1.2. ábra jelöléseit felhasználva a golyó kilökésének sebessége adott α szög mellett a munkatételből számítható ki.

Eszerint a súlylökő által a súlygolyón végzett W munka

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg(h_1 + l\sin\alpha)$$

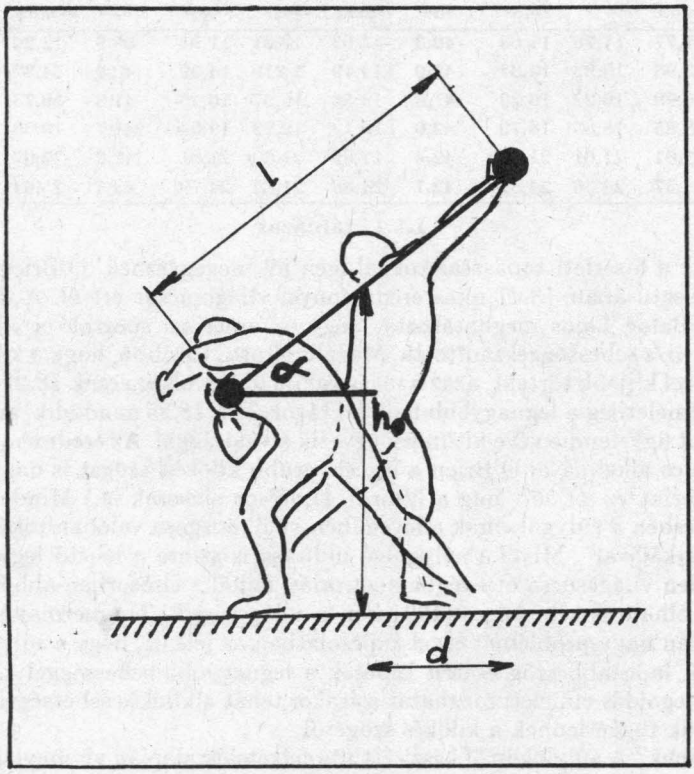
a helyzeti és mozgási energia megnövelésére fordítódik. Az összefüggésből

$$v = \sqrt{\frac{2[W - mg(h_1 + l\sin\alpha)]}{m}} \tag{I.1.11}$$

adódik, ami azt mutatja, hogy laposabb szög esetén a kilökés sebessége nagyobb lehet. Ugyanakkor a szög csökkenésével a

$$h = h_1 + l\sin\alpha$$

hajítási magasság is kissé csökken.



I.1.2. ábra

Mindazonáltal elképzelhető, hogy kissé laposabb szögű hajítás mellett nagyobb dobás érhető el. Ezek a feltételezések azonban kísérletileg nehezen vizsgálhatók, hiszen a dobóatléta által a dobás során végzett munka nehezen mérhető.

I.2. A labda pályája

A súlygolyó pályájának az iskolai fizikával szinte tökéletesen követhető leírása után foglalkozzunk most egy nehezebb problémával, a labda fizikájával.

Miközben dobjuk, rúgjuk, ütjük a labdát, nemigen gondolunk arra, hogy a sikeres játék feltétele a megfelelő alkalmazkodás a labda mozgását megszabó alapvető fizikai törvényekhez!

Mekkora sebességgel repülhet egy labda, milyen alakú a röppálya, mekkora erő hat a fejelő játékosra, hogyan lehet szögletből érintés nélkül gólt szerezni? Ilyen és hasonló kérdések gyakran felmerülnek a labdajátékokkal kapcsolatban. A következőkben néhány egyszerű, a labdajátékokkal kapcsolatos jelenség fizikai magyarázatával foglalkozunk.

I.2.1. Mekkora sebességgel repülhet a labda?

Becsüljük meg először azt, hogy milyen sebességel repülhet egy jó erősen megrúgott futballlabda! Kirúgáskor az ötösre letett labdát a hátvéd vagy a kapus rendszerint a félpályán túlra juttatja. A labda ívelt pályája, ha nem lenne légellenállás, éppen a már részletesen tárgyalt hajítási parabola lenne. Adott sebesség mellett a maximális hajítási távolság $\alpha=45°$ indítás esetén adódik és értéke

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{I.2.1}$$

Tegyük fel, hogy a kapus által kirúgott labda ezen az optimális pályán a felezővonalig (kb. *60 m*) jut el. Az (I.2.1.) összefüggést felhasználva a labda kezdősebessége kb. *30 m/s (30 m/s = 108 km/ó)* nagyságúnak adódik. Durva becslésünk szerint tehát a kirúgott labda sebessége megközelíti az autópályán megengedett maximális sebességet. Mivel a légellenállás a labdát erősen fékezi, biztosak lehetünk abban, hogy felezővonalig rúgott labda kezdősebessége ezt az értéket jóval meghaladja. Ha tehát pontosabb becsléseket akarunk adni, akkor a közegellenállás törvényeivel kell foglalkoznunk.

Ez a téma többnyire nem szerepel a középiskolai tananyagban, s mint látni fogjuk, általában csak közelítőleg, tapasztalati törvényekre támaszkodva tárgyalható.

I.2.2. A közegellenállás hatása a labdajátékokban

Kis sebességgel mozgó kisméretű gömb esetén a közeg mozgást akadályozó hatását a Stokes-féle törvény írja le. Az F közegellenállási erő egyenesen arányos a mozgás v sebességével, a gömb r sugarával és a közeg η viszkozitási tényezőjével. A Stokes-féle közegellenállási törvény szerint

$$F = 6\pi\eta r v. \tag{I.2.2}$$

A törvény akkor is érvényes, ha a gömböt v sebességgel áramló közegben nyugalomban tartjuk, azaz v tulajdonképpen a közeg és a test relatív sebességét jelenti.

A kis sebességű áramlásokban a közeg szabályosan, örvényképződés nélkül mozog (lamináris áramlás). Az ellenállás ilyen esetben az áramló közeg belső súrlódásából származik. Ebben az esetben ugyanis az áramló közegbe helyezett test felületén a közeg és a test pontjainak relatív sebessége zérus, és a sebesség a testtől távolodva fokozatosan a nyílt áramlási térben mért értékig emelkedik. A szomszédos folyadékrétegek közötti sebességkülönbség miatt nyíróerők ébrednek, s a testre ható közegellenállási erő tulajdonképpen ennek a következménye. A gömb sugarát vagy sebességét növelve a Stokes-törvény (I.2.2.) érvényét veszti, a közegellenállás rohamosan nő. A közegellenállás változását az okozza, hogy nagyobb sebességeknél az áramlás már nem lamináris, a gömb mögött örvények képződnek. A közegellenállási erő felléptét ekkor durván azzal indokolhatjuk, hogy az örvények nagy forgási energiájának fedezésére munkát kell végezni. Az örvények kinetikus energiája a test mozgása során megmozgatott tömeggel és a test sebességének négyzetével vehető arányosnak. Egy v sebességgel mozgó gömb Δt idő alatt közelítőleg

$$m \approx \varrho A v \cdot \Delta t \tag{I.2.3}$$

tömegű anyagot mozgat meg, ahol a ϱ a közeg sűrűségét, A a gömb homlokfelületét (főkörének területét) ($A = r^2\pi$) jelöli. A mozgatás során végzett $W = Fv\Delta t$ munka a közeg mozgási energiájává alakul, majd disszipálódik. Tegyük fel, hogy a megmozgatott m tömegű anyag v^* sebessége arányos a mozgó gömb v sebességével.

Ezek alapján tehát

$$Fv\Delta t = c\frac{1}{2}mv^2 = \frac{c}{2}A\varrho v \cdot \Delta t \cdot v^2. \tag{I.2.4}$$

A közeg mozgatásából adódó közegellenállás-járulék

$$F = \frac{c}{2}A\varrho v^2 = 0,225\pi\varrho r^2 v^2. \tag{I.2.5}$$

A c arányossági tényező az ún. „közegellenállási tényező", értéke gömb esetén $c = 0,45$.

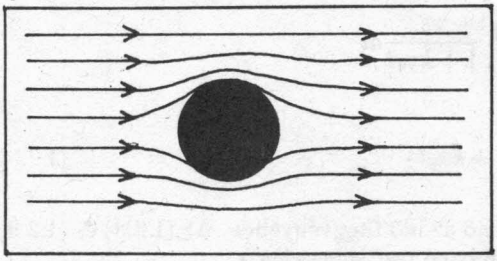
Általános esetben a közegellenállást a közeg belső súrlódása révén adódó (I.2.3.) összefüggés és a közeg felgyorsításából adódó ellenállás (I.2.5) kifejezése együtt határozza meg:

$$F = 6\pi\varrho r v + \frac{c}{2}\pi\varrho r^2 v^2. \tag{I.2.6}$$

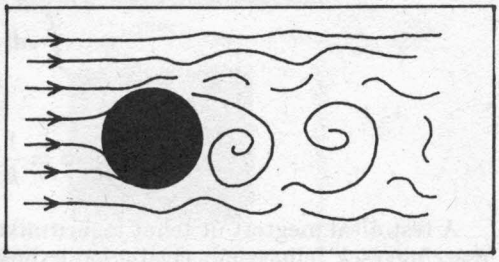
Az (I.2.6) kifejezés első tagjában az r sugár és a v sebesség az első hatványon szerepel, a második tag azonban mind r-től, mind v-től négyzetesen függ. Kis sebességek és kis átmérőjű gömb esetén a második tag elhanyagolható. Nagy sebességek és sugár esetén a második tag válik meghatározóvá, míg a Stokes-törvény elhagyható. A labda mozgását vizsgálva ez utóbbi közelítést alkalmazhatjuk.

A közegellenállás függését a mozgás sebességétől és a mozgó test nagyságától szemléletesen magyarázhatjuk a közegben kialakuló áramlási viszonyok alapján is. Kis méretű, kis sebességű gömb esetén a mozgó test környezetében lamináris áramlás alakul ki. A mozgó testtől távolodva a közeg egyes rétegei egyre kisebb sebességgel követik a mozgást. Az azonos sebességű rétegek elhelyezkedését az I.2.1. ábrán bemutatott áramlási kép szemlélteti.

Nagy sebesség esetén a mozgó test mögött a közeg örvényes, bonyolult mozgást végez — az áramlás turbulenssé válik (I.2.2. ábra). Ez akkor következik be, ha az áramlást jellemző dimenzió nélküli paraméter, az ún. *Reynolds*-féle szám $\left(R_e = \frac{r\varrho v}{\eta}\right)$ értéke meghaladja az $R_{\text{ekr}} = 1200$ kritikus értéket. A *Reynolds*-szám jó közelítéssel meghatározható az (I.2.6) formula két tagjának hányadosaként.



I.2.1. ábra



I.2.2. ábra

A következőkben mennyiségileg is megvizsgáljuk, hogy hogyan fékezi a labda mozgását a közegellenállás.

I.2.2.1. Vízszintesen mozgó labda

A legegyszerűbb esetben a labda vízszintes irányban mozog, és csak a közegellenállás fékezi. (Ez az erős feltételezés a valóságban sohasem teljesül, egyszerű matematikai tárgyalása azonban érdekes eredményekre vezet.) A ϱ sűrűségű közegben mozgó m tömegű, r sugarú gömb mozgásegyenlete

$$m\frac{dv}{dt} = -0,225\varrho r^2\pi v^2. \tag{I.2.7}$$

Vezessük be a $k = \frac{0,225\varrho r^2\pi}{m}$ egyszerűsítő jelölést. (A k paraméter értéke a közeget és a mozgó testet együtt jellemzi.) A

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

mozgásegyenletet integrálva:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2}dv = -k\int_0^t dt,$$

illetve ebből

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt$$

adódik, ahonnan a mozgó test pillanatnyi sebessége t idő elteltével a

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \tag{I.2.8}$$

alakban fejezhető ki. A test t idő alatt megtett x útja

$$x = \int v dt = \int \frac{v_0}{1 + kv_0 t} dt$$

$$x = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 t) \tag{I.2.9}$$

A test által megtett út tehát logaritmikusan nő az idő függvényében. Az (I.2.8) és (I.2.9) összefüggések felhasználásával adódik, hogy a mozgó test sebessége a

$$v = v_0 e^{-kx}$$

függvény szerint exponenciálisan csökken a távolság függvényében.

A mozgásra jellemző az $x^* = \frac{1}{k}$ távolság, amelynek megtétele során a test sebessége e-ed részére csökken, ahol x^* értéke független a test kezdősebességétől.

Eredményünket felhasználva érdemes kiszámítani, hogy a különböző labdajátékok esetén hogyan csökken a labda sebessége a játéktér átrepülése során. Az alábbi táblázatban az asztalitenisz, a tenisz, a futball és a golf adatait tüntettük fel.

labdajáték	a labda tömege (kg)	a labda sugara (m)	k	a játéktér hossza, L (m)	x^*	e^{-kL}
asztalitenisz	0,0025	0,019	0,13	2,74	8	0,7
tenisz	0,058	0,033	0,018	24	58	0,7
futball	0,45	0,11	0,025	120	40	0,05
golf	0,045	0,022	0,0082	–	120	–

I.2.1. táblázat

A fenti módon számított és a táblázatban közölt értékek a pingpong és a tenisz esetében jól megegyeznek a mérésekkel kapható tényleges adatokkal, a futball és a golf esetén azonban lényegesen eltérnek. A mérések szerint a labda sebessége kevésbé csökken, mint ahogy az a számítás alapján adódik. Az eltérés oka az, hogy számításainkban a gömbökre szélcsatorna-mérések alapján adódó c együttható értékét a sebességtől független állandónak ($c = 0,45$) tekintettük. A viszonylag nagy méretű és gyorsan mozgó futball-, illetve golflabda esetén c értéke kisebb: $c \approx 0,15$ (I.2.4. ábra).

I.2.2.2. Szabadon eső labda

A szabadon eső labdára a nehézségi erő és a közegellenállási erő hat. Mozgásegyenlete

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{c}{2}\varrho r^2 \pi v^2,$$

azaz

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2. \tag{I.2.10}$$

Az (I.2.10) egyenletből következik, hogy az eső labda csak

$$v = u = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{I.2.11}$$

sebességig gyorsul, ezután már változatlan sebességgel folytatja az útját. Az (I.2.10) összefüggés (I.2.11) felhasználásával a

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right)$$

alakra hozható. A differenciálegyenlet integrálásával:

$$u^2 \int \frac{dv}{u^2 - v^2} = g \int dt$$

megadható a labda pillanatnyi sebessége az idő függvényében:

$$v = u\,\mathrm{th}\left(\frac{gt}{u}\right). \tag{I.2.12}$$

Az esés során megtett út az (I.2.12) függvény idő szerinti integrálásával adódik:

$$x = \int v dt = u \int \mathrm{th}\left(\frac{gt}{u}\right) dt = \frac{u^2}{g} \ln \mathrm{ch}\left(\frac{gt}{u}\right),$$

illetve $u = \sqrt{\frac{g}{k}}$ felhasználásával

$$x = \frac{1}{k} \ln \mathrm{ch}\left(\frac{gt}{u}\right). \tag{I.2.13}$$

Az (I.2.12) összefüggés grafikonja (I.2.3. ábra) jól mutatja azt a tapasztalatból ismert tényt, hogy az eső testek sebessége rövidebb–hosszabb idő elteltével állandóvá válik.

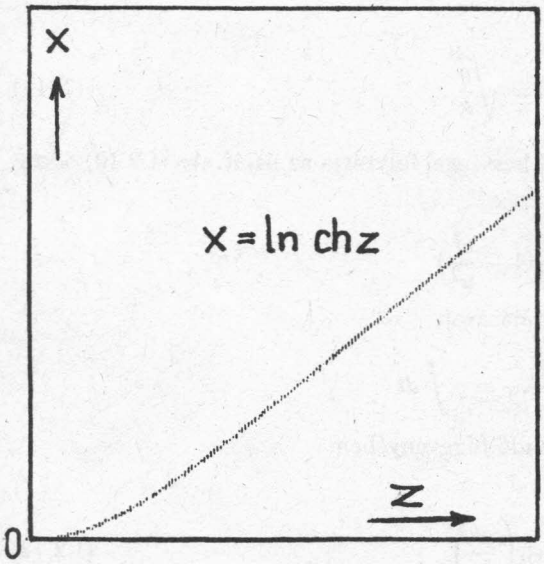
Az (I.2.12) és (I.2.13) összefüggésből becslést adhatunk arra, hogy milyen hosszú esés után közelíti meg a szabadon eső labda a végsebességét. Zsebszámológép segítségével ellenőrizhetjük, hogy $x^* = -\frac{1}{k}$ távolság megtétele után a test sebessége kb. *92-93* %-a az u végsebességnek, így a keresett távolság jó közelítéssel $\frac{1}{k}$.

A k állandó (I.2.10)-ből adódó

$$k = \frac{c\varrho r^2 \pi}{2m} \tag{I.2.14}$$

definícióját felhasználva, valamint a test $m = \frac{4}{3} r^3 \pi \varrho_t$ tömegét beírva az (I.2.14) összefüggésbe, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{k} = \frac{8}{3c} \frac{\varrho_t}{\varrho_k} r. \tag{I.2.15}$$



I.2.3. ábra

Az eső testek sűrűsége a levegő sűrűségének kb. *800–8000*-szerese, a c közegellenállási együttható pedig gömb esetén *0,15–0,45* között változik, így a végsebességet a test

$$x = \frac{1}{k} = B \cdot 1000r$$

úton éri el, ahol $5 < B < 144$ a közegellenállási és sűrűségviszonyoktól függően. $x^* = \frac{1}{k}$ becslése után az $u = \sqrt{\frac{g}{k}}$ képletből meghatározhatjuk a végsebességet is. Erre

$$u = 1000\sqrt{B \cdot r}$$

adódik, azaz az eső test sebessége a sűrűségviszonyoktól függően a

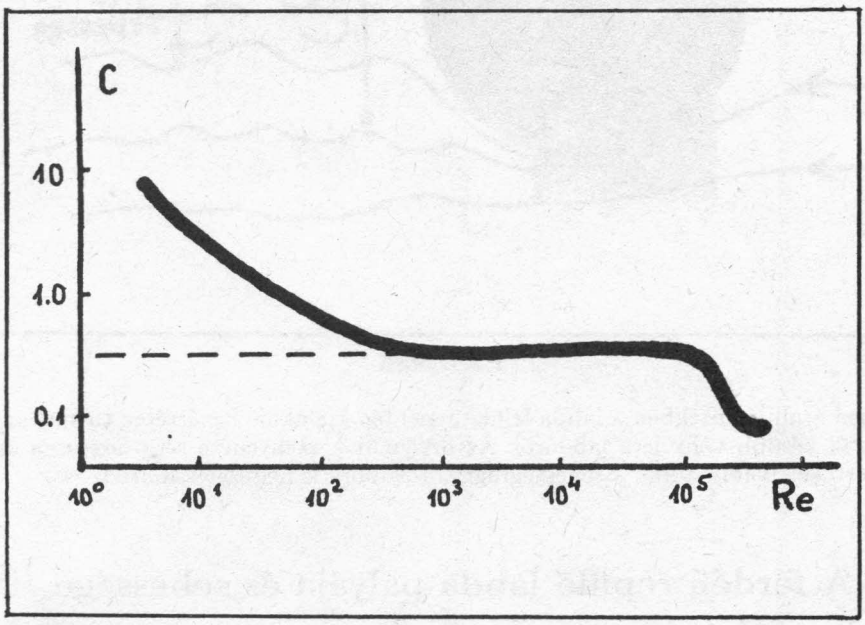
$$400\sqrt{r} < u < 1200\sqrt{r}$$

intervallumba esik ($\sqrt{r}$ együtthatójának dimenziója $\mathrm{m}^{-0,5}\mathrm{s}^{-1}$).

I.2.2.3. Mitől függ a közegellenállási tényező?

Az I.2.4. ábra a c közegellenállási tényező változását mutatja a *Reynolds*-szám függvényében. A tapasztalati úton felvett összefüggés szerint a *Reynolds*-szám *100–200 000* közötti intervallumában a közegellenállási tényező jó közelítéssel állandó, $c \approx 0,45$.

A labdajátékok esetén az alacsony *Reynolds*-számok tartománya általában jelentéktelen. A viszkozitási és sebességviszonyok többnyire olyanok, hogy a *Reynolds*-szám az állandó közegellenállási tényezőhöz tartozó intervallumba esik. Egyes esetekben, pl. a labdarúgás és a golf esetén jelentős szerepet játszhat a közegellenállási tényező hirtelen csökkenése is. A következő táblázat azokat a jellegzetes sebességeket mutatja, amelyeknél a közegellenállási tényező csökkenése elkezdődik. Összehasonlításul megadjuk a 30 m/s sebességhez tartozó Reynolds-számot is.



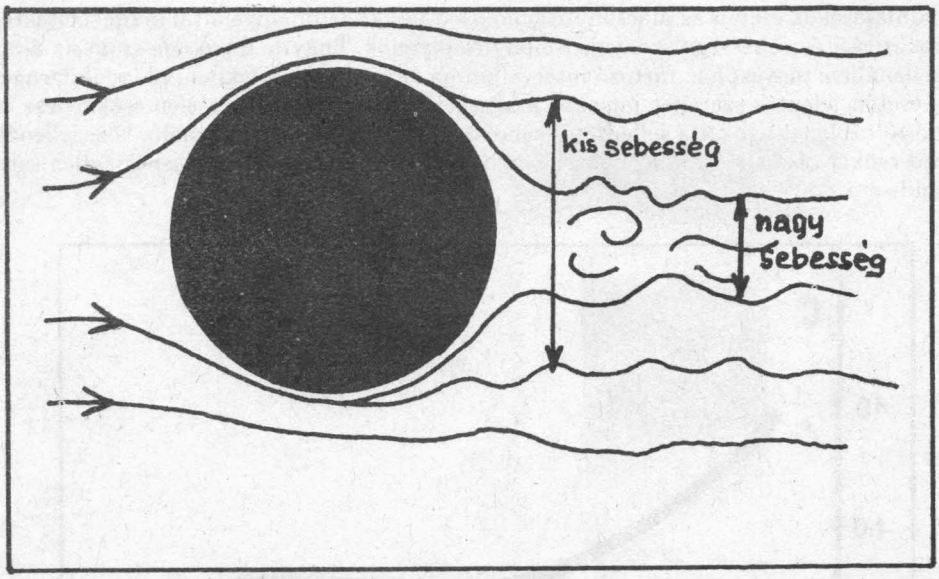
I.2.4. ábra

labdajáték	$v_{kr}(\frac{m}{s})$	$Re(30\frac{m}{s})$
asztalitenisz	100	70000
tenisz	55	120000
labdarúgás	16	429000
golf	80	80000

I.2.2. táblázat

A táblázat jól mutatja, hogy asztalitenisz és tenisz esetén a közegellenállási tényező csökkenésére nem kell számítanunk. Az erősen megrúgott futball-, illetve a nagy sebességgel száguldó golflabda repülési távolságát azonban az ugrásszerű közegellenállás-csökkenés erősen megnövelheti.

A közegellenállás csökkenése szemléletesen a következőképpen magyarázható. Nagy sebességeknél a test mögötti örvényút erősen elkeskenyedik (I.2.5. ábra), ezért az örvények elszállította energia csökken. Az örvényút keskenyedése azért következik be, mert a nagy



I.2.5. ábra

sebességgel áramló közegben a labda felülete mentén kialakuló határréteg turbulens lesz és emiatt csak később válik le a labdáról. Az örvényút keskenyedése természetesen csak a c tényező értékét befolyásolja, a sebességfüggés továbbra is négyzetes marad.

I.2.3. A ferdén repülő labda pályája és sebessége

A közegellenállási erő miatt a labda mozgásegyenletét az előzőekben csak egyszerűsítő feltételek mellett oldottuk meg. Ferdén elhajított (rúgott, ütött) labda általános mozgásegyenlete a következő:

$$\ddot{\underline{r}} = \underline{g} - kv^2 \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}, \tag{I.2.16}$$

ahol $\underline{r}$ a labda hely-, $\underline{v}$ pedig sebességvektora. A közegellenállási erő irányát a sebesség irányába mutató egységvektor szabja meg. Az (I.2.16) egyenletet komponensekre bontva a mozgásegyenlet az

$$\ddot{\underline{x}} = -k|\underline{v}|\dot{x} \quad \text{és} \tag{I.2.17}$$

$$\ddot{\underline{y}} = -k|\underline{v}|\dot{y} + g \tag{I.2.18}$$

egyenletekre bomlik szét. Ez a differenciálegyenlet-rendszer egzakt módon nem oldható meg. Számítógép segítségével azonban a mozgás pályagörbéje egyszerűen megadható. Ez a mozgásegyenlet szinte iskolapéldájává vált a numerikus megoldás bemutatásának. Ezért itt

csak egy egyszerű algoritmust mutatunk be, és az IBM PC-re Turbo Pascalban írt program vázlatát közöljük.

Jelöljük egy adott időpillanatban a labda helykoordinátáit x_i-vel és y_i-vel, sebességének komponenseit pedig v_{x_i}-vel és v_{y_i}-vel!

Ebben a pillanatban a gyorsulás

$$a_{x_i} = -k\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \cdot v_{x_i} \quad \text{és} \tag{I.2.19}$$

$$a_{y_i} = g - k\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \cdot v_{y_i} \tag{I.2.20}$$

Közelítsük a labda mozgását egy kicsiny τ időtartamban egyenletesen gyorsuló mozgással, amelynek gyorsulása a fenti állandó érték. Jelöljük az így elért sebességet $\underline{v}_{i+1} = (v_{x_{i+1}}, v_{y_{i+1}})$-gyel, a helyet pedig $\underline{r}_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1}$-gyel. A sebesség- és helykoordináták a fenti feltevéssel a

$$v_{x_{i+1}} = v_{x_i} + a_{x_i}\tau \quad \text{és} \tag{I.2.21}$$

$$v_{y_{i+1}} = v_{y_i} + a_{y_i}\tau, \tag{I.2.22}$$

illetve az

$$x_{i+1} = x_i + \frac{v_{x_i} + v_{x_{i+1}}}{2}\tau \quad \text{és} \tag{I.2.23}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{v_{y_i} + v_{y_{i+1}}}{2}\tau \tag{I.2.24}$$

egyenletekből határozhatók meg.

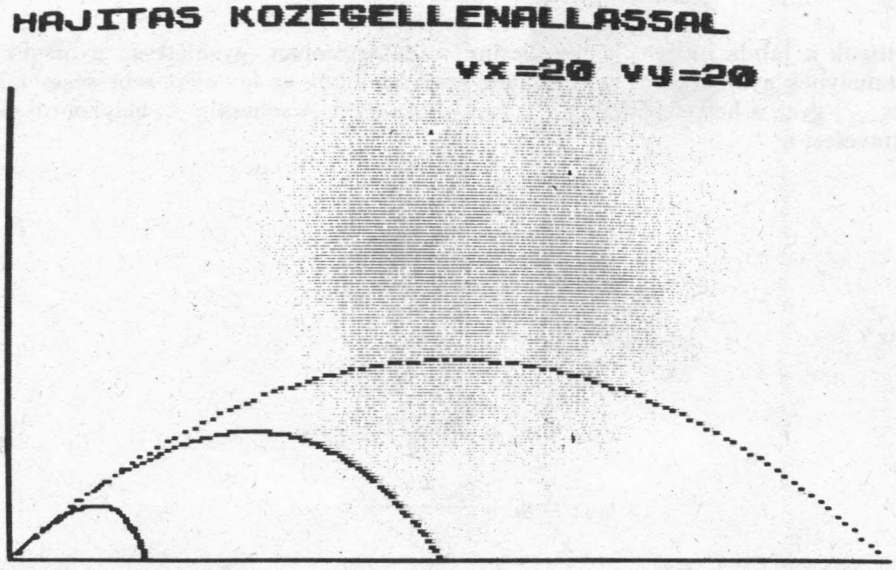
Az eljárás egyszerűen folytatható, ha a kezdeti sebesség- és helykoordináták helyére az (I.2.20)-(I.2.23) egyenletek alapján meghatározott $\underline{r}_{i+1}$ és $\underline{v}_{i+1}$ értékeket írjuk, és a számítást megismételjük.

Erre a gondolatmenetre alapozva készült a következő program is.

```
/* Turbo Pascal program hajítási pálya kiszámítására */
/* a közegellenállás figyelembevételével */
var     v, vx, vy: real;   /* sebesség és komponensei */
        ax, ay:    real;   /* gyorsuláskomponensek */
        tau, k, g: real;
begin
        ...
        repeat
                v:=sqrt(sqr(vx)+sqr(vy));
                ax:=-k*v*vx; ay:=g-k*v*vy;
                x:=x+vx*tau+ax*sqr(tau)/2;
                y:=y+vy*tau+ay*sqr(tau)/2;
                vx:=vx+ax*tau; vy:=vy+ay*tau;
```

```
        ... ábrázolás
    until ...
    ...
end.
```

Az alkalmazott közelítési módszer igen egyszerű, ezért akkor várhatunk jó eredményt, ha viszonylag finom időfelbontást (kicsiny τ érték) alkalmazunk. Az egyenletrendszer magasabbrendű közelítésekkel (*Runge-Kutta-módszerek*) természetesen pontosabban is megoldható.



I.2.6. ábra

Az I.2.6. ábrán az összehasonlítást kedvéért az ideális parabolapálya, illetve a közegellenállással fékezett pingpong- és futball-labda számítógép rajzolta pályája látható.